

# 線形代数学第 1 - 期末試験問題 -

情報システム工学科 1 年生

平成 15 年度前期 - 2003.7.23 -

試験中に使用できるものは筆記用具の他に、汗を拭くためのタオルやハンカチ、ティッシュペーパー、携帯電話（時計機能のみ使用可でキータッチは不可）

- 次の命題は正しいか「正しい」または「正しくない」と答えよ。また「正しくない」と答えたときは、簡単な反例を示せ。
  - 方程式  $Ax = b$  が解を持つのは  $b$  が  $A$  の行空間にあるときである。
  - 方程式  $Ax = b$  が解を持つのは  $b$  が  $A$  の左零空間に直交するときである。
  - $R^2$  における 3 個のベクトルは線形独立である。
  - 線形独立な  $n$  個のベクトルが張る空間は高々  $n$  次元である。
  - 行列  $A$  の線形独立な行ベクトルの数と線形独立な列ベクトルの数は等しい。
  - 内積が零であるベクトルは常に直交する。
  - $R^n$  において、部分空間  $V$  と  $W$  の基底が互いに線形独立であり、 $V$  の次元 +  $W$  の次元 =  $n$  であるとき、 $V$  の基底 +  $W$  の基底は  $R^n$  の基底を構成する。
  - ベクトル  $v$  と  $w$  が直交するとき、 $v$  は  $w$  方向の成分を持つ。
  - 行空間がベクトル  $(1, 1, 0, 0)$  を含み、零空間が  $(0, 1, 0, 1)$  を含むような行列が存在する。

- 次の方程式  $Ax = b$  の一般解を求めよ。 $Ax = 0$  の一般解と、 $Ax = b$  の特殊解の和の形で表せ。

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

- 以下の問いに答えよ。

- ベクトル  $v_1 = (1, -1, 0, 1)$ ,  $v_2 = (0, 1, 1, -1)$ ,  $v_3 = (1, 0, 1, 0)$  で張られる空間  $V$  の次元と基底を求めよ。
- 上記の空間  $V$  に対する直交補空間  $W$  を求めよ。具体的には、 $W$  の次元と基底を求める。

- 以下の問いに答えよ。

- $R^3$  におけるベクトル  $x = (x_1, x_2, x_3)$  で、 $x_1 = x_2$  である部分空間の基底を求めよ。
- 零空間が  $(1, 0, -1)$  で張られるような行列を求めよ。

- 方程式  $Ax = b$  の解に関する次の文章の空欄を語句または記号で埋めよ（結果のみでよい）。但し、 $A$  は  $m \times n$  行列、 $x$  は  $n$  次元ベクトル、 $b$  は  $m$  次元ベクトル、階数は  $r$  とする。

「 $m < n$  のとき、 $r = m$  であれば (ア) 解を持つ。 $r < m$  の場合は、 $b$  が  $A$  の (イ) 空間にあるとき (ア) 解を持ち (イ) 空間にない場合は (ウ) 解となる。一方、 $m > n$  の場合は、 $r = (エ)$ 、かつ、 $b$  が  $A$  の (オ) 空間にあれば、一意解が求まる。 $r < n$  の場合は  $b$  が  $A$  の (オ) 空間にあれば (カ) 解を持ち (オ) 空間になければ (キ) 解となる。」（「 $b$  が  $A$  の列空間にある」ことは、ガウスの前進消去で  $A$  を  $U$ 、 $b$  を  $c$  に変形したとき、「 $U$  の零の行に対応する  $c$  の要素が零である」ことと同じである）

- 以下の問いに答えよ。

- 次の行列に付随する 4 つの基本部分空間（行空間、零空間、列空間、左零空間）を求めよ（空間の次元と基底を求める）。

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- 行空間と零空間、及び列空間と左零空間が直交することを確認せよ。基底が直交することを示す。