線形代数学第１－期末試験解答例－

情報システム工学科１年生　　　平成 15 年度前期－ 2003.7.23 －

1(a) 「正しくない」．反例を以下に示す．$\boldsymbol{b}$ は行空間 $(1,-1)$ にあるが，この方程式は解を持たない．解を持つのは $\boldsymbol{b}$ が $\boldsymbol{A}$ の列空間にあるときである．

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \tag{1}$$

(b) 「正しい」．解を持つのは $\boldsymbol{b}$ が $\boldsymbol{A}$ の列空間にあるときである．列空間は左零空間に直交するから，$\boldsymbol{b}$ は列空間にある．

(c) 「正しくない」．２次元ベクトルで線形独立なものは高々２個である．反例を以下に示す．

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \tag{2}$$

これらのベクトルでは次の縦続関係が成り立つ．

$$\boldsymbol{v}_1 + 2\boldsymbol{v}_2 - \boldsymbol{v}_3 = 0 \tag{3}$$

(d) 「正しくない」．線形独立な n 個のベクトルが張る空間は「高々」ではなく,「必ず」n 次元空間である．反例を以下に示す．

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{4}$$

$\boldsymbol{v}_1$，$\boldsymbol{v}_2$ は線形独立であり，これらが張る空間は必ず 2 次元である．

(e) 「正しい」

(f) 「正しくない」．反例は零ベクトルである．零ベクトルと任意のベクトルの内積は零であるが，直交していない．

(g) 「正しい」

(h) 「正しくない」．反例を次に示す．

$$\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{w} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \tag{5}$$

$\boldsymbol{v}$ の成分を $\boldsymbol{w}$ を含む直交系に分解する．$\boldsymbol{w}$ に直交する別のベクトルを $\boldsymbol{u}$ とする．

$$\boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{6}$$

$$\boldsymbol{v} = c_1\boldsymbol{w} + c_2\boldsymbol{u} \tag{7}$$

を満たす，c_1，c_2 を求める．

$$\begin{aligned} 1 &= c_1 + c_2 \\ 0 &= c_1 - c_2 \\ 1 &= -c_1 \end{aligned}$$

上式を満たす c_1，c_2 は存在しない．

(i) 「正しくない」．行空間と零空間は直交するが，問題のベクトルの内積は 1 であり，直交していない．

2. まず，$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の一般解を求める．$\boldsymbol{A}$ をガウスの前進消去により $\boldsymbol{U}$ に変形する．

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \boldsymbol{U} \tag{8}$$

$\boldsymbol{x} = (u, v, w)$ とすると，u，v が基底変数で，w が自由変数である．

$$\begin{aligned} u + w &= 0 \\ v + w &= 0 \end{aligned}$$

これより，

$$\boldsymbol{x} = w \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{9}$$

次に $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ の一般解を求める．一般解は自由変数 $w=0$ として求まる．

$$\begin{aligned} u &= 1 \\ -u+v &= 0 \end{aligned}$$

これより，

$$\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{10}$$

以上をまとめると，次のようになる．

$$\boldsymbol{x}=w\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{11}$$

3(a) ベクトル $\boldsymbol{v}_1$，$\boldsymbol{v}_2$，$\boldsymbol{v}_3$ を行ベクトルとする行列 $\boldsymbol{A}$ を考える．これらのベクトルで張られる空間 V は $\boldsymbol{A}$ の行空間である．$\boldsymbol{A}$ をガウスの前進消去により $\boldsymbol{U}$ に変形して基底と次元を求める．

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A} &= \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \\ &\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \boldsymbol{U} \end{aligned}$$

上式より，階数が 2 であるから，2 次元空間である．また，基底の一つの組は $(1,-1,0,1)$，$(0,1,1,-1)$ である．

(b) 空間 V の直交補空間 W は $\boldsymbol{A}$ の零空間である．$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}, \boldsymbol{x}=(x_1,x_2,x_3,x_4)$ とすると，x_1，x_2 は基底変数であり，x_3，x_4 が自由変数である．

$$\begin{aligned} x_1-x_2+x_4 &= 0 \\ x_2+x_3-x_4 &= 0 \end{aligned}$$

これより，

$$\begin{aligned} x_2 &= -x_3+x_4 \\ x_1 &= -x_3 \end{aligned}$$

零空間は次のように求まる．

$$\boldsymbol{x} = x_3 \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{13}$$

従って，空間 W は 2 次元であり，基底は上式で与えられる．

4(a) 条件 $x_1 = x_2$ より，部分空間の次元は 2 次元となる。すなわち，基底は 2 つのベクトルからなる。x_3 は 2 つのベクトルが線形独立となるように決める．一例を示す．

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{14}$$

(b) 行空間は零空間に直交するから，行空間を張るベクトル $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2, v_3)$ は次式を満たす．

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \boldsymbol{v} = v_1 - v_3 = 0 \tag{15}$$

v_1 が基底変数で，v_2 と v_3 が自由変数である．この方程式の解は次のようになる．

$$\boldsymbol{v} = v_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + v_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{16}$$

従って，求める行列は次のようになる．

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{17}$$

5. （ア）不定解,（イ）列,（ウ）不能解,（エ）n,（オ）列,（カ）不定解,（キ）不能解

6(a) **行空間**

行列 $\boldsymbol{A}$ をガウスの前進消去により，行列 $\boldsymbol{U}$ に変換する．

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \\ &\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \boldsymbol{U} \end{aligned} \tag{18}$$

階数は $r = 2$ であるから，行空間は 2 次元 $(= r = 2)$ である．基底は上式から $(1, 0, -1, 1)$，$(0, 1, -1, 2)$ となる．

零空間

上で求めた行列 $\boldsymbol{U}$ より，$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}, \boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ において，x_1，x_2 が基底変数，x_3，x_4 が自由変数である．

$$x_1 - x_3 + x_4 = 0 \tag{19}$$

$$x_2 - x_3 + 2x_4 = 0 \tag{20}$$

より，

$$\boldsymbol{x} = x_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{21}$$

これより，零空間は 2 次元 $(= n - r = 4 - 2)$ であり，基底は $(1, 1, 1, 0)$, $(-1, -2, 0, 1)$ である．

列空間

行列 $\boldsymbol{U}$ より，$\boldsymbol{A}$ の第 1 列と第 2 列が線形独立となる．これより，列空間は 2 次元 $(= r = 2)$ で，基底は $(1, 0, -1)$，$(0, 1, 1)$ である．

左零空間

$\boldsymbol{A}^T$ をガウスの前進消去により，行列 $\boldsymbol{U}$ に変換する．

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \boldsymbol{U} \tag{22}$$

上で求めた行列 $\boldsymbol{U}$ より，$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}, \boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3)$ において，x_1，x_2 が基底変数，x_3 が自由変数である．

$$x_1 - x_3 = 0 \tag{23}$$

$$x_2 + x_3 = 0 \tag{24}$$

より，

$$\boldsymbol{x} = x_3 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{25}$$

これより，左零空間は 1 次元 $(= m - r = 3 - 2)$ であり，基底は $(1, -1, 1)$ である．