平成16年度前期

線形代数学第1　中間試験解答例　　2004.5.19

1. (a) ベクトルの内積

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} = 2\times 1 + (-1)\times(-1) + 3\times 2 = 2+1+6 = 9 /\!/$$

(b) ベクトルの外積

$$\begin{bmatrix} 5 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -3 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5\times 2 & 5\times(-3) & 5\times(-4) \\ -2\times 2 & -2\times(-3) & -2\times(-4) \\ 1\times 2 & 1\times(-3) & 1\times(-4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & -15 & -20 \\ -4 & 6 & 8 \\ 2 & -3 & -4 \end{bmatrix} /\!/$$

(c) 行列の積

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2-1, & -1+3 \\ -2-6, & 1+4 \\ -2-1, & 1+3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -8 & 5 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} /\!/$$

(d) 行列の積

問題を AB と表したとき，Aの行は4次元，Bの列は3次元であり，<u>計算不能</u>である．

2. 行列 A が $L_1D_1U_1$ と $L_2D_2U_2$ に分解できたとする．L_1, L_2 は対角要素が1の下3角行列，U_1, U_2 は対角要素が1の上3角行列，D_1, D_2 は対角行列である．

$$A = L_1D_1U_1 = L_2D_2U_2 \qquad (2.1)$$

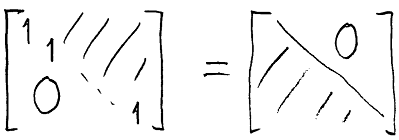
上式の左から $D_1^{-1}L_1^{-1}$ を，右から U_2^{-1} をかける

$$\underbrace{D_1^{-1}\underbrace{L_1^{-1}L_1}_{I}D_1}_{I}U_1U_2^{-1} = D_1^{-1}L_1^{-1}L_2D_2\underbrace{U_2U_2^{-1}}_{I} \qquad (2.2)$$

$$\therefore \quad U_1U_2^{-1} = D_1^{-1}L_1^{-1}L_2D_2 \qquad (2.3)$$

U_2^{-1} は対角要素が1の上3角行列，L_1^{-1} は対角要素が1の下3角行列，D_1^{-1} は対角行列である．これらより，式(2.3)の左辺は対角要素が1の上3角行列，右辺は下3角行列となる．これらが

等しいという条件より，式(2,3)の左辺，右辺とも単位行列(I)となる．
式(2,3)は概念的に次のように表される．



(2,3)′

式(2,3)より

$$U_1^{-1}U_2 = I \tag{2,4}$$

$$D_1^{-1}L_1^{-1}L_2D_2 = I \tag{2,5}$$

式(2,4)より

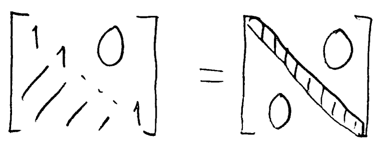
$$U_2 = U_1 \quad // \tag{2,6}$$

式(2,5)の左から D_1，右から D_2^{-1} をかける．

$$D_1D_1^{-1}L_1^{-1}L_2D_2D_2^{-1} = D_1D_2^{-1} \tag{2,7}$$

$$\therefore \quad L_1^{-1}L_2 = D_1D_2 \tag{2,8}$$

式(2,8)の左辺は対角要素が1の下三角行列，右辺は対角行列である．概念的に表すと次のようになる．



(2,8)′

これより，式(2,8)の両辺は I となる．

$$L_1^{-1}L_2 = I \tag{2,9}$$

$$D_1D_2^{-1} = I \tag{2,10}$$

$$\therefore \quad L_2 = L_1 \quad // \tag{2,11}$$

$$D_1 = D_2 \quad // \tag{2,12}$$

3. ガウスの前進消去により．

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{matrix} \times 2 \\ \times(-1) \end{matrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & -5 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix} \times\frac{2}{5} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 17/5 \end{bmatrix} \tag{3,1}$$

式(3.1)の前進消去により

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2/5 & 1 \end{bmatrix}$$

(補)

$$E_{21} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},\quad E_{31} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix},\quad E_{32} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2/5 & 1 \end{bmatrix}$$

$L^{-1} = E_{32}E_{31}E_{21}$ より、Lを求める。

あるいは、$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ b & c & 1 \end{bmatrix}$ としたとき、
$\left\{ \begin{array}{l} \text{第1行を}a\text{倍して第2行より引く} \\ \text{第1行を}b\text{倍して第3行より引く} \\ \text{第2行を}c\text{倍して第3行より引く} \end{array} \right\}$
に相当する。この関係を用いて直接Lを求めてもよい。

式(3.1)より、

$$U \to \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 17/5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 17/5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1/5 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= DU$$

以上より、

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2/5 & 1 \end{bmatrix}}_{L}\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 17/5 \end{bmatrix}}_{D}\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1/5 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{U} \quad //$$

4.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\to \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -2 & -1 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -2/3 & 2/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & -3 & -2 & -1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\to \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2/3 & 1/3 & 1/6 \\ 0 & 2 & 0 & -2/3 & 2/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & -3 & -2 & -1 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2/3 & 1/3 & 1/6 \\ 0 & 1 & 0 & -2/6 & 2/6 & 1/6 \\ 0 & 0 & 1 & 2/3 & 1/3 & -1/3 \end{array}\right]$$

$$A^{-1} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \\ -2 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & -2 \end{bmatrix}$$ //

5. (a) $\begin{cases} x+y=1 \\ x-y=2 \end{cases}$ $x=\frac{3}{2}$, $y=-\frac{1}{2}$

(b) $\begin{cases} x+y=1 \\ -x-y=-1 \end{cases}$ これらは同じ方程式

$x+y=1$ を満す x, y の組み合せは無限にある.

(c) $\begin{cases} x+y=1 \\ 2x+2y=-1 \end{cases}$

2番目の方程式は $x+y=-1/2$ となり, 1番目の方程式と相反する.
従って, 解はない.

6. 「正しくない」

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

この行列では, どの行も他の行の乗数倍にはなっていない. しかし, 第3行 = 第1行 + 第2行となっている. Aの前進消去を行う.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & \boxed{0} \end{bmatrix}$$

3行目のピボットに相当する第3要素は零となる.