

線形代数学第 1 - 期末試験問題 -

情報システム工学科 1 年生

平成 17 年度前期 - 2005.8.3 -

試験中に使用できるものは筆記用具の他に、汗を拭くためのタオルやハンカチ、ティッシュペーパー、携帯電話（時計機能のみ使用可でキータッチは不可）

1. 次の問に答えよ。

- (a) $Ax = Ay$ であっても、 $x = y$ とはならないことを示せ（ヒント）行空間の成分と零空間の成分に分ける。
- (b) $n \times n$ 行列 A の全ての列ベクトルが線形独立ならば、 A^2 の全ての列ベクトルも線形独立であることを示せ（ヒント） A 及び A^2 の零空間の次元に着目する。
- (c) $Ax = b$ が解を持つための必要十分条件は b が A の 4 つの基本部分空間のどれに直交するときであるか。理由も述べること。
- (d) 行空間が $[1, 1, -1]^T$ を含み、零空間が $[0, -1, 1]$ を含むような行列は存在しないことを示せ。
- (e) n 個の m 次元ベクトルは $n > m$ のとき線形従属となることを示せ。

2. A を $m \times n$ 行列、階数を r 、 x を n 次元ベクトル、 b を m 次元ベクトルとする。方程式 $Ax = b$ の解に関して以下の問いに答えよ。

- (a) 解が b に「依存しない条件」と「依存する条件」を m と r で表せ。
- (b) 解が存在するとき、「解が一意解である条件」と「解が不定解である条件」を n と r で表せ。
- (c) b によらず、一意解を持つ条件を m, n, r で表せ。
- (d) b によらず、不定解を持つ条件を m, n, r で表せ。
- (e) b により、一意解または不能解を持つ条件を m, n, r で表せ。
- (f) b により、不定解または不能解を持つ条件を m, n, r で表せ。

3. ベクトル空間に関して以下の問いに答えよ。

- (a) ベクトル $v_1 = [1, 0, 1, -1]^T$, $v_2 = [1, -1, 0, 2]^T$, $v_3 = [2, -1, 1, 1]^T$ で張られる空間の基底を求めよ。
- (b) ベクトル $v_1 = [1, 0, 1]^T$, $v_2 = [1, 1, 0]^T$ で張られる空間 V に対する直交補空間 W を求めよ（空間を求めよ = 空間の次元と空間を張る基底を求める）。
- (c) 零空間が $[1, -1, 0]$, $[0, 1, -1]$ で張られる行列を求めよ（ヒント）行空間を考える。

4. 次の方程式 $Ax = b$ の一般解を求めよ。 $Ax = 0$ の一般解と、 $Ax = b$ の特殊解の和の形で表せ。

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

5. 次の行列に付随する 4 つの基本部分空間（行空間、零空間、列空間、左零空間）を求めよ（空間の次元と基底を求める）。さらに、行空間と零空間、及び列空間と左零空間が直交することを確かめよ。（基底が直交することを示す）。

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$