平成17年度 前期

線形代数学第1 ー期末試験ー 解答例　2005.8.3

1. (a)　xを行空間の成分x_rと零空間の成分x_nに分ける(∵行空間と零空間は直交補空間)

$$x = x_r + x_n$$

$$Ax = Ax_r + Ax_n = Ax_r$$

ここで　$y = x_r$ とおくと，$x_n \neq 0$の場合は

$Ax = Ay$ であるが $x = y$ とはならない

(b)　Aの階数は $r = n$ である．零空間の次元は $n - r = 0$ である．すなわち，$Ax = 0$ を充す xは0(自明な解)のみである．次に $A^2x = 0$ を満す解が 0のみであることを示す．まず，$x = 0$であれば $A^2x = 0$を満す．次に，$x \neq 0$とする．$A^2x = A(Ax) = Ay$，ここで $y = Ax \neq 0$ である．さらに，$Ay \neq 0$となり，$x \neq 0$に対して $A^2x \neq 0$である．従って，A^2の零空間は 0のみとなり，次元 $n - r = 0$である．すなわち，$r = n$となり，全ての列ベクトルが線形独立となる．

(別法)

Aは逆可能であり，A^{-1}が存在する．次に A^2の逆行列を考える．$(A^2)^{-1} = (AA)^{-1} = A^{-1}A^{-1}$．これは A^{-1}が存在するから可能である．逆行列が可能であるから，全ての列ベクトルは線形独立である．

(c)　$Ax = b$が解を持つための必要十分条件は bがAの列空間にあるときである．Aの列空間に直交する空間は左零空間である．

(d)　行空間(の全てのベクトル)と零空間(の全てのベクトル)は直交する．

$$[1, 1, -1]\begin{bmatrix}0\\-1\\1\end{bmatrix} = 0 - 1 - 1 = -2$$

内積が零でないから，この2つのベクトルは直交しない．すなわち行空間と零空間のベクトルではない．

(e)　n個のベクトルを列ベクトルとする $n \times m$ 行列を考える．この行列の階数は $r \leq m < n$ である．rは線形独立な列(行)ベクトルの数に等しい．$r < n$であるから，n個のベクトルは線形従属である．

2.(a) $\mathbb{b} = \begin{bmatrix} \mathbb{b}_1 \\ \mathbb{b}_2 \end{bmatrix}$ とする. $\mathbb{b}_1$が r 次元, $\mathbb{b}_2$が $m-r$ 次元である. 方程式の解は$\mathbb{b}_2$に依存するので, $r=m$であれば$\mathbb{b}_2$は発生しないので解は$\mathbb{b}$に依存しない. 答 $\underline{r=m}$ … 依存しない条件 …(A1)

$\underline{r<m}$ 依存する条件 …(A2)

(b) 自由変数が存在すると不定解となる. 自由変数の数は $n-r$ であるから,

$\underline{答}$ $\begin{cases} r=n \cdots 解が一意 & \cdots (B1) \\ r<n \cdots 不定解 & \cdots (B2) \end{cases}$

(c) (A1)+(B1)より, $\underline{m=n=r}$

(d) (A1)+(B2)より, $\underline{r=m<n}$

(e) (A2)+(B1)より, $\underline{r=n<m}$ $\mathbb{b}_2=\mathbb{0}$のとき一意解

$\mathbb{b}_2\neq\mathbb{0}$のとき不能解

(f) (A2)+(B2)より, $\underline{r<m \text{ かつ } r<n}$

3.(a) v_1, v_2, v_3から線形独立な組を求める. あるいはv_1, v_2, v_3の線形結合として線形独立なベクトルを求める. 後者はガウスの前進消去により求められる.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & 3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad 答 \ \underline{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}}$$

(別解) 上式より, 線形独立なベクトルは2個であることが分かる. 元の行列の2個の行ベクトルはいずれも線形独立であることが分かる.

(答) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ における2個の行ベクトルの任意の組合せ.

(b) v_1, v_2 で張られる空間を行空間とすると，その直交補空間は零空間である．

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

w を自由変数とする．

$$\begin{cases} u + w = 0 \\ v - w = 0 \end{cases} \qquad \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = w\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

直交補空間 ＝ 1次元で基底は $[-1, 1, 1]^T$

(c) 行空間を求める．これは零空間の直交補空間であるから，零空間を行空間と見なして，その零空間を求める．

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{matrix} u - v = 0 \\ v - w = 0 \end{matrix} \qquad \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = w\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

(答) $\underline{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}}$

4. $Ax = 0$ の一般解

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

u, w を基底変数
v を自由変数とする．

$$\begin{cases} u - v + 2w = 0 \\ w = 0 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = v\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

--- 一般解（自由変数の選び方により変わる）

$Ax = b$ の特殊解

自由変数 $v = 0$ とする．第1，2行の方程式を用いる．

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} u + 2w = 1 \\ w = 1 \end{cases}$$

$\therefore\ u = -1$

$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{--- 特殊解}$$

$Ax = b$ の一般解

$$x = \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = C \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C\text{は任意の定数}$$

5. 行空間　ガウスの前進消去を行う

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{--- (1)}$$

$$\begin{cases} \text{次元}: 2 \quad (= \text{階数 } r = 2) \\ \text{基底}: [1\ -1\ 0\ 1]^T,\ [0\ -1\ -2\ 2]^T \end{cases}$$

零空間　$Ax = 0$ を解く．式(1)より

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

u, v を基底変数
w, z を自由変数
$(n - r = 4 - 2 = 2$ 個$)$

$$\begin{cases} u - v + z = 0 \\ -v - 2w + 2z = 0 \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} u = -2w + z \\ v = -2w + 2z \end{cases}$$

$$x = w \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{--- (2)}$$

$$\begin{cases} \text{次元}: 2 \quad (n - r = 4 - 2 = 2) \\ \text{基底}: [-2\ -2\ 1\ 0]^T,\ [1\ 2\ 0\ 1]^T \end{cases}$$

列空間　式(1)より A の第1列と第2列が線形独立である．

$$\begin{cases} \text{次元}: 2 \quad (\text{階数 } r = 2) \\ \text{基底}: [1\ -1\ 2]^T,\ [-1\ 0\ -1]^T \end{cases}$$

<u>左零空間</u>　$A^T y = 0$ を解く

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

u, v を基底変数，w を自由変数とする．

$$\begin{cases} u - v + 2w = 0 \\ \quad -v + w = 0 \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} u = -w \\ v = w \end{cases} \qquad \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = w \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} \text{次元}: 1 \quad (m - r = 3 - 2) \\ \text{基底}: \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T \end{cases}$$