線形代数学第1－中間試験

[1] (a)

$$\begin{bmatrix} 5 & -3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = 5\times 2 + (-3)\times(-1) + 1\times 0$$
$$= 10 + 3 + 0 = 13 \quad //$$

(b)
$$\begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 0 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\times 3 & 2\times 0 & 2\times(-2) \\ -3\times 3 & -3\times 0 & -3\times(-2) \\ 5\times 3 & 5\times 0 & 5\times(-2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 0 & -4 \\ -9 & 0 & 6 \\ 15 & 0 & -10 \end{bmatrix} //$$

(c)
$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -3 & -1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\times 1 - 1\times(-3) + 0\times(-2), & 1\times 0 - 1\times(-1) + 0\times 2 \\ 2\times 1 - 1\times(-3) + 1\times(-2), & 2\times 0 - 1\times(-1) + 1\times 2 \\ 0\times 1 + 1\times(-3) - 2\times(-2), & 0\times 0 + 1\times(-1) - 2\times 2 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 3 \\ 1 & -5 \end{bmatrix} //$$

(d)
$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -9 & 7 & 8 \\ -5 & -3 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\times 1 + 0\times(-9) - 1\times(-5) + 1\times 0 \\ 2\times 2 + 0\times 7 - 1\times(-3) + 1\times(-1) \\ 2\times(-3) + 0\times 8 - 1\times 2 + 1\times 1 \end{bmatrix}^T$$
$$= \begin{bmatrix} 7 & 6 & -7 \end{bmatrix} //$$

[2] ガウスの前進消去を行う.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & b_1 \\ 0 & 1 & -2 & b_2 \\ 1 & -1 & -3 & b_3 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & b_1 \\ 0 & 1 & -2 & b_2 \\ 0 & 1 & -2 & b_3 - b_1 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & b_1 \\ 0 & 1 & -2 & b_2 \\ 0 & 0 & 0 & b_3 - b_1 - b_2 \end{array}\right]$$

方程式は次のようになる.

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 - b_1 - b_2 \end{bmatrix}$$

この方程式が解を持つためには, 第3式より

$$b_3 - b_1 - b_2 = 0 \quad //$$

[3] ガウスの~~前~~進消去を行う.
第1行の c/a 倍を第2式から引く.

$$\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -c/a & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & d-\frac{c}{a}b \end{bmatrix}$$

最後の行列の対角要素を 1にする.

$$\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & d-\frac{c}{a}b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & d-\frac{c}{a}b \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & b/a \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbb{DU}$$

$\mathbb{L}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -c/a & 1 \end{bmatrix}$ の逆行列は $\mathbb{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ c/a & 1 \end{bmatrix}$ であるから

$$\mathbb{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ c/a & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & d-\frac{c}{a}b \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & b/a \\ 0 & 1 \end{bmatrix} //$$

[4]

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & -1/2 & 1/2 & 1 \end{array}\right]$$

$$\to \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1/2 & -1/2 & 1/2 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 0 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1/2 & -1/2 & 1/2 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

以上より $\mathbb{A}^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} //$

[5] 第1行の関係を書き下す.

$$\begin{cases} a_{11}b_{11} = 1 \\ a_{11}b_{12} = 0 \\ a_{11}b_{13} = 0 \end{cases}$$ これより $b_{12} = b_{13} = 0$

第2行の関係を書き下す.
$$\begin{cases} a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} = 0 \\ a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} = 1 \\ a_{21}b_{13} + a_{22}b_{23} = 0 \end{cases}$$ これより $b_{23} = 0$

以上より，行列$\{b_{ij}\}$は次のように下三角行列となる．

$$\begin{bmatrix} b_{11} & 0 & 0 \\ b_{21} & b_{22} & 0 \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix} \quad //$$

[6] 線形従属な方程式を考える．係数行列としては特異行列となる．

$$\begin{cases} u - v = 1 \\ -2u + 2v = -2 \end{cases} \quad //$$

第2式 = 第1式×(−2)の関係になっており，独立な方程式は1個である．方程式の解は

$$u - v = 1$$

を満たす不定解となる． //

[7] $\mathbb{P}$を左から掛けて第1行と第2行を交換する場合を考える．このような$\mathbb{P}$は単位行列の第1列(行)と第2列(行)を入れ替えた行列である．

$$\mathbb{P} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} // \qquad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d & e & f \\ a & b & c \\ g & h & i \end{bmatrix}$$

$\mathbb{P}^n$について，$\mathbb{P}$を左から2回掛けることを考える．1回掛けることにより，第1行と第2行が交換される．さらに，もう1回掛けると第1行と第2行が交換され元にもどる．従って，$\mathbb{P}^2 = \mathbb{I}$である．

$n = 2m$ のとき

$$\mathbb{P}^n = \mathbb{P}^{2m} = (\mathbb{P}^2)^m = \mathbb{I}^m = \mathbb{I} \quad //$$

$n = 2m+1$ のとき

$$\mathbb{P}^n = \mathbb{P}^{2m+1} = \mathbb{P}^{2m} \times \mathbb{P} = \mathbb{I} \times \mathbb{P} = \mathbb{P} \quad //$$