

線形代数学第 1 - 期末試験問題 -

情報システム工学科 1 年生

平成 18 年度前期 - 2006.8.2 -

試験中に使用できるものは筆記用具の他に、汗を拭くためのタオルやハンカチ、ティッシュペーパー、携帯電話（時計機能のみ使用可でキータッチは不可）

1. 次のベクトル集合はベクトル空間を構成するか否か、理由を付して答えよ。

- (a) ベクトル $v = [1, 0, -2]^T$ のスカラー倍からなるベクトル集合 .
- (b) ベクトル $v_1 = [1, -1, 0]^T$ のスカラー倍、及び、 $v_2 = [2, 1, -1]^T$ のスカラー倍からなるベクトル集合 .
- (c) ベクトル $v_1 = [-1, 1, 2]^T$ と $v_2 = [0, -2, 1]^T$ の線形結合からなるベクトル集合 .
- (d) 第 1 要素が零であるベクトルからなる集合 .
- (e) 第 2 要素が 1 であるベクトルからなる集合 .
- (f) $v = [v_1, v_2, v_3]^T$, $v_1 + 3v_2 - v_3 = 0$ を満たすベクトルからなる集合 .

2. 空間 V と W 互いに直交する部分空間であれば、 V と W の双方に共通に含まれるベクトルは零ベクトルのみであることを示せ .

3. 次の行列について擬似逆行列を求めよ .

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

4. 任意の A, b に対して、次の 2 つの方程式のうち、解を持つのはいずれかである ((a) が解を持つとき、(b) は解を持たない . (b) が解を持つとき、(a) は解を持たない) ことを示せ .

- (a) $Ax = b \cdots (b \text{ が } A \text{ の列空間にある})$
- (b) $A^T y = 0, y^T b \neq 0 \cdots (y^T b \neq 0 \text{ である } y \text{ が } A^T \text{ の零空間にある})$
(ヒント) b を A の列空間の成分 b_c と左零空間の成分 b_{nT} に分けて、 $b_{nT} = 0$ または $\neq 0$ に着目する . 列空間と左零空間は互いに直交している .

5. A を $m \times n$ 行列、階数を r 、 x を n 次元ベクトル、 b を m 次元ベクトルとする . 方程式 $Ax = b$ が次に示す解を持つための条件を m, n, r で表せ . 不可能な場合 (条件が存在しない) は「不可」と答えよ .

- (a) b によらず一意解を持つ .
- (b) b によらず不定解を持つ .
- (c) b によらず一意解または不定解を持つ .
- (d) b により一意解または不能解を持つ .
- (e) b により不定解または不能解を持つ .
- (f) b により一意解または不定解を持つ .

6. $Ax = 0$ の解が $v_1 = [1, 0, 1]^T$ 、 $v_2 = [1, 1, 0]^T$ の線形結合で表されるとき、 A を求めよ .

7. 次の方程式 $Ax = b$ の一般解を求めよ . $Ax = 0$ の一般解と、 $Ax = b$ の特殊解の和の形で表せ .

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

8. 次の行列に付随する 4 つの基本部分空間 (行空間、零空間、列空間、左零空間) を求めよ (空間の次元と基底を求める) . さらに、行空間と零空間、及び列空間と左零空間が直交すること確かめよ . (基底が直交することを示す) .

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$