線形代数学第１ －期末試験解答例－

情報システム工学科１年生　　　平成 18 年度前期－ 2006.8.2 －

1. ベクトル集合がスカラー倍及び和に関して閉じているかどうかを調べる．
   (a) 「ベクトル空間を構成する」ベクトル集合から取り出したベクトルを $\boldsymbol{v}$ とするとき，$c\boldsymbol{v}$ もまたこの集合に含まれる．さらに，ベクトル集合から $c_1\boldsymbol{v}$，$c_2\boldsymbol{v}$ を取り出したとき，$c_1\boldsymbol{v}+c_2\boldsymbol{v}=(c_1+c_2)\boldsymbol{v}$ もベクトル集合に含まれる．
   (b) 「ベクトル空間を構成しない」ベクトル集合に含まれるベクトルは $\boldsymbol{v}_1$ のスカラー倍か，または $\boldsymbol{v}_2$ のスカラー倍のいずれかであるから $\boldsymbol{v}_1+\boldsymbol{v}_2$ はこの条件を満たさないためベクトル集合には含まれない．
   (c) 「ベクトル空間を構成する」$c_1\boldsymbol{v}_1+c_2\boldsymbol{v}_2$ のスカラー倍は $\boldsymbol{v}_1$ と $\boldsymbol{v}_2$ の線形結合であり，$c_1\boldsymbol{v}_1+c_2\boldsymbol{v}_2$ と $d_1\boldsymbol{v}_1+d_2\boldsymbol{v}_2$ の和も $\boldsymbol{v}_1$ と $\boldsymbol{v}_2$ の線形結合であり，いずれもベクトル集合に含まれる．
   (d) 「ベクトル空間を構成する」このベクトルのスカラー倍も第１要素は零である．また，第１要素が零である２つのベクトルの和の第１要素も零である．
   (e) 「ベクトル空間を構成しない」このベクトルのスカラー倍では第２要素が１から変化する（スカラー倍）．第２要素が１であるふたつのベクトルの和では第２要素は２になる．
   (f) 「ベクトル空間を構成する」$\boldsymbol{v}=[v_1,v_2,v_3]^T$ と $\boldsymbol{v}'=[v_1',v_2',v_3']$ が与えられた条件を満たすとき，$a\boldsymbol{v}+b\boldsymbol{v}'$ がこの条件を満たすことを示す．

$$
\begin{aligned}
&(av_1+bv_1')+3(av_2+bv_2')-(av_3+bv_3')\\
&=a(v_1+3v_2-v_3)+b(v_1'+3v_2'-v_3')=0
\end{aligned}
\tag{1}
$$

2. V と W の双方に含まれるベクトルを $\boldsymbol{x}$ とする．V と W は直交するから，$\boldsymbol{x}$ 自身が直交することになり，$\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{x}=\|\boldsymbol{x}\|^2=0$ であるから，$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ となる．

3. $\boldsymbol{A}$ に対しては右逆行列 $\boldsymbol{C}$ が存在する．

$$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A}^T(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^T)^{-1} \tag{2}$$

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \tag{3}$$

$$(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^T)^{-1} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \tag{4}$$

$$\boldsymbol{A}^T(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^T)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \tag{5}$$

4. $\boldsymbol{b}$ を $\boldsymbol{A}$ の列空間の成分 $\boldsymbol{b}_c$ と左零空間の成分 $\boldsymbol{b}_{nT}$ に分解する．$\boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}_c + \boldsymbol{b}_{nT}$.

(a) $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ が解を持つのは，$\boldsymbol{b}$ が $\boldsymbol{A}$ の列空間にあるときであるから，$\boldsymbol{b}_{nT} = \boldsymbol{0}$ が成り立つ．

(b) $\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{y} = \boldsymbol{0}$ が解を持つとき，$\boldsymbol{y}$ は $\boldsymbol{A}$ の左零空間にある．左零空間は列空間に直交するから $\boldsymbol{y}^T\boldsymbol{b}_c = 0$ であり，さらに，条件を加味すると

$$\boldsymbol{y}^T\boldsymbol{b} = \boldsymbol{y}^T(\boldsymbol{b}_c + \boldsymbol{b}_{nT}) = \boldsymbol{y}^T\boldsymbol{b}_{nT} \neq 0 \tag{6}$$

となる．従って，$\boldsymbol{b}_{nT} \neq 0$ となる．

以上より，(a) では $\boldsymbol{b}_{nT} = \boldsymbol{0}$ となり，(b) では $\boldsymbol{b}_{nT} \neq 0$ となるから，同時に解を持つことはなく，いずれかが解を持つ．

5. $\boldsymbol{b}$ によらず解を持つための条件は $r = m$ であり，$r < m$ のときは解の存在は $\boldsymbol{b}$ に依存する．次に，一意解を持つための条件は $r = n$ であり，不定解を持つための条件は $r < n$ である．

(a) $r = m$ かつ $r = n$（$r = m = n$）

(b) $r = m$ かつ $r < n$（$r = m < n$）

(c) 一意解を持つ条件は $r = n$ であり，不定解を持つ条件は $r < n$ であり，これらは同時には成り立たないので「不可」である．

(d) $r < m$ かつ $r = n$（$r = n < m$）

(e) $r < m$ かつ $r < n$

(f) (c) の理由と同じで「不可」である．

6. $\boldsymbol{v}_1$ と $\boldsymbol{v}_2$ は $\boldsymbol{A}$ の零空間の基底である．$\boldsymbol{A}$ を求めることは行空間を求めることと同じである．行空間は零空間と直交補空間の関係にあるので，$\boldsymbol{A}$ の零空間を行空間とする行列 $\boldsymbol{B}$ の零空間を求める．

$$\boldsymbol{B}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \tag{7}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{8}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{9}$$

$$u = -w \tag{10}$$

$$v = w \tag{11}$$

$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = w \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{12}$$

$\boldsymbol{B}$ の零空間を張る基底は $[-1, 1, 1]^T$ であり，これは同時に $\boldsymbol{A}$ の行空間の基底でもあるから，$\boldsymbol{A}$ は次式で与えられる．

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \tag{13}$$

7. まず，$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の一般解を求める．

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{14}$$

ガウスの前進消去を行う.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{15}$$

u，v を基底変数，w を自由変数として一般解を求める.

$$u = w \tag{16}$$

$$v = 2w \tag{17}$$

$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = w \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{18}$$

特殊解は $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ の第 1 式，第 2 式で $w = 0$ とおいて求める.

$$u = 1 \tag{19}$$

$$v = 2 \tag{20}$$

より，特殊解は次のように求まる.

$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{21}$$

以上より，$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ の一般解は次のように求まる.

$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = w \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{22}$$

8(a) 行空間

行列 $\boldsymbol{A}$ をガウスの前進消去により，行列 $\boldsymbol{U}$ に変換する．

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -2 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \\ &\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \boldsymbol{U} \end{aligned} \tag{23}$$

階数は $r=2$ であるから，行空間は２次元である．基底は上式から $[1,0,-1,0]^T$，$[0,1,-1,2]^T$ となる．

零空間

上で求めた行列 $\boldsymbol{U}$ より，$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}, \boldsymbol{x}=[x_1,x_2,x_3,x_4]^T$ において，x_1，x_2 が基底変数，x_3，x_4 が自由変数である．

$$x_1 - x_3 = 0 \tag{24}$$

$$x_2 - x_3 + 2x_4 = 0 \tag{25}$$

より，

$$\boldsymbol{x} = x_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{26}$$

これより，零空間は２次元 $(n-r=4-2=2)$ であり，基底は $[1,1,1,0]^T$，$[0,-2,0,1]^T$ である．

列空間

行列 $\boldsymbol{U}$ におけるピボットの位置より，$\boldsymbol{A}$ の第１列と第２列が線形独立となる．これより，列空間は２次元 $(r=2)$ で，基底は $[1,-1,1]^T$，$[0,1,1]^T$ である．

左零空間

$\boldsymbol{A}^T$ をガウスの前進消去により，行列 $\boldsymbol{U}$ に変換する．

$$\boldsymbol{A}^T = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \boldsymbol{U} \tag{27}$$

上で求めた行列 $\boldsymbol{U}$ より，$\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{y} = \boldsymbol{0}, \boldsymbol{y} = [y_1, y_2, y_3]^T$ において，y_1，y_2 が基底変数，y_3 が自由変数である．

$$y_1 - y_2 + y_3 = 0 \tag{28}$$

$$y_2 + y_3 = 0 \tag{29}$$

より，

$$\boldsymbol{y} = y_3 \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{30}$$

これより，左零空間は 1 次元 $(m - r = 3 - 2 = 1)$ であり，基底は $[-2, -1, 1]^T$ である．