線形代数学第１－中間試験問題－

情報システム工学科１年生　　　平成１８年度前期－ 2006.5.24 －

1. 次のベクトル，行列の計算を行え．計算が不可能な場合は「計算不可」と答えること．

$$(a)\ \begin{bmatrix} 3 & -2 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (b)\ \begin{bmatrix} -3 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 & -1 & 4 \end{bmatrix} \quad (c)\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(d)\ \begin{bmatrix} -2 & -3 & 5 & 7 \\ -1 & 0 & 5 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 & 3 & 7 \\ -10 & 4 & -3 \\ 0 & -4 & 5 \end{bmatrix} \quad (e)\ \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 0 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$$

2. 次の行列 $\boldsymbol{A}$ と交換可能な行列 $\boldsymbol{B}$ を求めよ．また，そのときの $\boldsymbol{AB}$ を求めよ．但し，$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}, \boldsymbol{I}$ は自明であるので，これら以外の行列を求めること．

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

3. 行列 $\boldsymbol{A}$ を LDU に分解する方法は一通りであることを示せ．すなわち，もし $\boldsymbol{A}$ が $\boldsymbol{L}_1\boldsymbol{D}_1\boldsymbol{U}_1$ と $\boldsymbol{L}_2\boldsymbol{D}_2\boldsymbol{U}_2$ に分解できたとすると，$\boldsymbol{L}_1 = \boldsymbol{L}_2$，$\boldsymbol{D}_1 = \boldsymbol{D}_2$，$\boldsymbol{U}_1 = \boldsymbol{U}_2$ が成り立つことを示せ．

4. 次の行列を LDU に分解せよ。

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

5. 次の行列の逆行列を *Gauss-Jordan* 法により求めよ．

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

6. ３角行列の逆行列は同じ形の３角行列であることを，次の b_{ij} を求めることにより示せ．但し，a_{ii} は零でないとする．

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

7. 次の条件を満たす２元連立方程式の例を与え，このような解を持つことを示せ．
(a) 唯一組の解を持つ．
(b) 無限に多くの解を持つ．
(c) 解を持たない．

8. 行列はその行列のどの行もほかの行の乗数倍になっていなければ必ず逆行列が求められるか．3×3 行列を例にして考えよ．（ヒント）行列 $\boldsymbol{A}$ の逆行列は $\boldsymbol{A}$ をガウスの前進消去，後退代入及び対角要素の正規化（１にする）により $\boldsymbol{I}$ に変換するのと同じ計算を $\boldsymbol{I}$ に対して行うことにより求められる．従って，$\boldsymbol{A}$ の逆行列が求まるためには $\boldsymbol{A}$ が $\boldsymbol{I}$ に変換できることが必要十分条件となる．