

# 線形代数学第 1 - 期末試験問題 -

情報システム工学科 1 年生

平成 19 年度前期 - 2007.8.1 -

試験中に使用できるものは筆記用具の他に、汗を拭くためのタオルやハンカチ、ティッシュペーパー、携帯電話（時計機能のみ使用可でキータッチは不可）

1.  $A$  を  $m \times n$  行列, 階数を  $r$ ,  $x$  を  $n$  次元ベクトル,  $b$  を  $m$  次元ベクトルとする. 方程式  $Ax = b$  が次に示す解を持つための条件を  $m, n, r$  で表せ. 不可能な場合 (条件が存在しない) は「不可」と答えよ.
  - (a)  $b$  によらず一意解を持つ.
  - (b)  $b$  によらず不定解を持つ.
  - (c)  $b$  によらず一意解または不定解を持つ.
  - (d)  $b$  により一意解または不能解を持つ.
  - (e)  $b$  により不定解または不能解を持つ.
  - (f)  $b$  により一意解または不定解を持つ.
2. 次の方程式  $Ax = b$  の一般解を求めよ.  $Ax = 0$  の一般解と,  $Ax = b$  の特殊解の和の形で表せ.

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

3. 次の行列について擬似逆行列を求めよ.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

4.  $R^3$  における次の 2 つのベクトル空間  $V$  と  $W$  の関係は「直交空間」「補空間」「直交補空間」「いずれでもない」のいずれであるか答えよ. 理由も示すこと (ベクトルの直交性, ベクトルの独立性, 2 つの空間の次元の和, 等に着目).
  - (a)  $V: x$  軸,  $W: y$  軸.
  - (b)  $V: x$  軸,  $W: x-y$  平面.
  - (c)  $V: x$  軸,  $W: y-z$  平面.
  - (d)  $V: x$  軸,  $W: y-z$  平面上にある直線  $y+z=0$
  - (e)  $V: x-y$  平面上にある直線  $x+y=0$ ,  $W: y-z$  平面上にある直線  $y-z=0$
5. ベクトル空間に関して, 以下の問いに答えよ.
  - (a) ベクトル  $v_1 = [1, 0, 1, -1]^T$ ,  $v_2 = [-1, 0, -1, 1]^T$ ,  $v_3 = [1, 0, 1, -1]^T$  で張られる空間  $V$  の次元と基底を求めよ.
  - (b) 上記の空間  $V$  に対する直交補空間  $W$  を求めよ. 具体的には,  $W$  の次元と基底を求めよ.
6. 次の行列に付随する 4 つの基本部分空間 (行空間, 零空間, 列空間, 左零空間) を求めよ (空間の次元と基底を求めよ). さらに, 行空間と零空間, 及び列空間と左零空間が直交することを確認せよ. (基底が直交することを示す).

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

7. 行列  $A$  の作用に関して, 以下の問いに答えよ.
  - (a)  $A$  の零空間にあるベクトルを  $x_n \neq 0$  とするとき, もし,  $x$  が  $Ax = b$  の解であるならば,  $x + x_n$  も解であることを示せ.
  - (b)  $A$  の行空間にあるベクトルを  $x_r$  とするとき,  $Ax_r = b$  を満たす解は唯一であることを示せ (ヒント:  $x_r$  と  $x'_r$  が解であると仮定して,  $x_r = x'_r$  となることを示す.)