線形代数学第１－期末試験問題＜解答例＞

情報システム工学科１年生　　　平成１９年度前期－ 2007.8.1 －

1.　$\boldsymbol{A}$ を $m \times n$ 行列，階数を r，$\boldsymbol{x}$ を n 次元ベクトル，$\boldsymbol{b}$ を m 次元ベクトルとする．方程式 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ が次に示す解を持つための条件を m，n，r で表せ．不可能な場合（条件が存在しない）は「不可」と答えよ．

［解答］

$\boldsymbol{b}$ によらず解を持つための条件は $r = m \cdots (a1)$ であり，解の有無が $\boldsymbol{b}$ に依存する場合は $r < m \cdots (a2)$ である．さらに，解を持つとき，それが一意解であるための条件は $r = n \cdots (b1)$ であり，不定解であるための条件は $r < n \cdots (b2)$ である．これらの条件を以下の場合に当てはめる．

(a)　$\boldsymbol{b}$ によらず一意解を持つ．

(a1)+(b1) より，$r = m = n$ となる．

(b)　$\boldsymbol{b}$ によらず不定解を持つ．

(a1)+(b2) より，$r = m < n$ となる．

(c)　$\boldsymbol{b}$ によらず一意解または不定解を持つ．

(a1)+(b1) または (a1)+(b2) となる．しかし，これらを同時に満たす行列 $\boldsymbol{A}$ は存在しないので,「不可」．

(d)　$\boldsymbol{b}$ により一意解または不能解を持つ．

(a2)+(b1) より，$r = n < m$ となる．

(e)　$\boldsymbol{b}$ により不定解または不能解を持つ．

(a2)+(b2) より，$r < m, r < n$ となる．

(f)　$\boldsymbol{b}$ により一意解または不定解を持つ．

(a2)+(b1) または (a2)+(b2) となる．しかし，これらを同時に満たす行列 $\boldsymbol{A}$ は存在しないので,「不可」．

2. 次の方程式 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ の一般解を求めよ。$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ の一般解と，$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ の特殊解の和の形で表せ。

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

[解答]

ガウスの前進消去により，方程式は次のように変形できる．

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

まず，$\boldsymbol{Ax} = \mathbf{0}$ の一般解を求める．u，v が基底変数，w が自由変数である．

$$u - v = 0$$
$$v + w = 0$$

より，

$$v = -w$$
$$u = -w$$

を得る．ベクトル表示をすると次のようになる．

$$\boldsymbol{x} = w \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

次に，$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ の $w = 0$ に対する特殊解を求める．方程式は次のようになる．

$$u - v = 1$$
$$v = 0$$

従って，$u = 1, v = 0, w = 0$ となる．一般解と特殊解をまとめる．

$$\boldsymbol{x} = w \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

3. 次の行列について擬似逆行列を求めよ．

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

[解答]

行の数>列の数であるから，次式で与えられる左逆行列が存在する（可能性がある）.

$$\boldsymbol{B} = (\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{A}^T$$

具体的に計算する.

$$\boldsymbol{B} = \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

4. $\boldsymbol{R}^3$ における次の２つのベクトル空間 V と W の関係は「直交空間」,「補空間」,「直交補空間」,「いずれでもない」のいずれであるか答えよ．理由も示すこと.（ベクトルの直交性，ベクトルの独立性，２つの空間の次元の和，等に着目）.

[解答]

直交空間：V の基底と W の基底が直交する.

補空間：V の基底と W の基底が線形独立であり，かつ，V の次元＋ W の次元=3.

直交補空間：V の基底と W の基底が直交し，かつ，V の次元＋ W の次元=3.

(a) V：x 軸，W：y 軸.
V の基底を $\boldsymbol{v} = [x, 0, 0]^T$，$W$ の基底を $\boldsymbol{w} = [0, y, 0]^T$ と表せる．$\boldsymbol{v}^T\boldsymbol{w} = 0$ であるから，V と W は直交している．V の次元 (1) ＋ W の次元 (1)=2 ＜ 3 であるから補空間ではない．よって,「直交空間」である.

(b) V：x 軸，W：$x - y$ 平面.
V の基底を $\boldsymbol{v} = [x, 0, 0]^T$，$W$ の基底を $\boldsymbol{w}_1 = [x, 0, 0]^T$，$\boldsymbol{w}_2 = [0, y, 0]^T$ と表せる．$\boldsymbol{v}^T\boldsymbol{w}_1 \neq 0$ であるから，V と W は直交していない．また，線形独立でもないので，V の次元 (1) ＋ W の次元 (2)=3 であるが補空間ではない．よって,「いずれでもない」に該当する.

(c) V：x 軸，W：$y-z$ 平面．

V の基底を $\boldsymbol{v}=[x,0,0]^T$，W の基底を $\boldsymbol{w}_1=[0,y,0]^T$，$\boldsymbol{w}_2=[0,0,z]^T$ と表せる．$\boldsymbol{v}^T\boldsymbol{w}_i=0, i=1,2$ であるから，V と W は直交している．さらに，V の次元 (1) ＋ W の次元 (2)=3 であるから,「直交補空間」である．

(d) V：x 軸，W：$y-z$ 平面上にある直線 $y+z=0$

V の基底を $\boldsymbol{v}=[x,0,0]^T$, W の基底を $\boldsymbol{w}=[0,y,-y]^T$ と表せる．$\boldsymbol{v}^T\boldsymbol{w}=0$ であるから，V と W は直交している．一方，V の次元 (1) ＋ W の次元 (1) ＜ 3 であるから，補空間ではない，よって,「直交空間」である．

(e) V：$x-y$ 平面上にある直線 $x+y=0$，W：$y-z$ 平面上にある直線 $y-z=0$

V の基底を $\boldsymbol{v}=[x,-x,0]^T$，$W$ の基底を $\boldsymbol{w}=[0,y,y]^T$ と表せる．$\boldsymbol{v}^T\boldsymbol{w}\neq 0$ であるから，V と W は直交していない．$\boldsymbol{v}$ と $\boldsymbol{w}$ は線形独立であるが，V の次元 (1) ＋ W の次元 (1) ＜ 3 であるので，補空間でもない．よって，「いずれでもない」に該当する．

5. ベクトル空間に関して，以下の問いに答えよ．

(a) ベクトル $\boldsymbol{v}_1=[1,0,1,-1]^T$，$\boldsymbol{v}_2=[-1,0,-1,1]^T$，$\boldsymbol{v}_3=[1,0,1,-1]^T$ で張られる空間 V の次元と基底を求めよ．

［解答］

$\boldsymbol{v}_1$，$\boldsymbol{v}_2$，$\boldsymbol{v}_3$ を行ベクトルとする行列 $\boldsymbol{A}$ の行空間を求める問題と考えることが出来る．$\boldsymbol{A}$ をガウスの前進消去により，行列 $\boldsymbol{U}$ に変形したとき，ピボットを含む（零でない）行ベクトルが基底となる．

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \to \boldsymbol{U}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

上式より，基底は $[1,0,1,-1]^T$ で次元は 1 次元である．

(b) 上記の空間 V に対する直交補空間 W を求めよ．具体的には，W の次元と基底を求める．

［解答］

空間 V を行空間とする行列の零空間を求めればよい．次の方程式を解く．

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \\ x \end{bmatrix} = 0$$

u が基底変数で，他は全て自由変数である．

$$u + w - x = 0$$

より，次の一般解を得る．

$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \\ x \end{bmatrix} = v \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + w \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

以上より，空間 W の基底は $[0,1,0,0]^T, [-1,0,1,0]^T, [1,0,0,1]^T$ で，次元は 3 次元である．

6. 次の行列に付随する 4 つの基本部分空間（行空間，零空間，列空間，左零空間）を求めよ（空間の次元と基底を求める）．さらに，行空間と零空間，及び列空間と左零空間が直交することを確かめよ．(基底が直交することを示す)．

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

[解答]

行空間：$\boldsymbol{A}$ をガウスの前進消去により $\boldsymbol{U}$ に変形する．

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \rightarrow \boldsymbol{U} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\boldsymbol{U}$ においてピボットを有する（零でない）行ベクトルが $\boldsymbol{A}$ の行空間の基底になる．従って，行空間の基底は $[1,-1,0,1]^T, [0,-1,1,0]^T$ であり，次元は

２次元である．

零空間：$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ の解ベクトルが零空間のベクトルであるから，この方程式の一般解を求める．この方程式は $\boldsymbol{Ux} = \boldsymbol{0}$ と等価である．$\boldsymbol{x} = [u, v, w, y]^T$ とすると，u, v が基底変数，w, y が自由変数である．方程式は次のようになる．

$$\begin{aligned} u - v + y &= 0 \\ -v + w &= 0 \end{aligned}$$

これより，

$$\begin{aligned} v &= w \\ u &= w - y \end{aligned}$$

一般解は次のようになる．

$$\boldsymbol{x} = w \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

これより，$\boldsymbol{A}$ の零空間の基底は $[1, 1, 1, 0]^T, [-1, 0, 0, 1]^T$ となり，次元は２次元である．

列空間：$\boldsymbol{U}$ のピボットが第１列，第２列にあるので，$\boldsymbol{A}$ における線形独立な列ベクトルも第１列，第２列となる．従って，$\boldsymbol{A}$ の列空間の基底は $[1, -1, -1]^T, [-1, 0, -1]^T$ であり，次元は２次元である．

左零空間：$\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{y} = \boldsymbol{0}$ の解ベクトルが零空間のベクトルであるから，この方程式の一般解を求める．

$$\boldsymbol{A}^T = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \to \boldsymbol{U} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\boldsymbol{y} = [u, v, w]^T$ とすると，u, v が基底変数，w が自由変数である．方程式は

次のようになる．

$$\begin{aligned} u - v - w &= 0 \\ -v - 2w &= 0 \end{aligned}$$

これより，

$$\begin{aligned} v &= -2w \\ u &= -w \end{aligned}$$

一般解は次のようになる．

$$\boldsymbol{y} = w \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

これより，$\boldsymbol{A}$ の左零空間の基底は $[-1, -2, 1]^T$ であり，次元は 1 次元である．

次に，空間が直交することを確認する．具体的には，各空間の基底同士が直交する，すなわち，内積=0 であることを確認する．
行空間と零空間：$[1, -1, 0, 1][1, 1, 1, 0]^T = 0, [1, -1, 0, 1][-1, 0, 0, 1]^T = 0,$ $[0, -1, 1, 0][1, 1, 1, 0]^T = 0, [0, -1, 1, 0][-1, 0, 0, 1]^T = 0$
列空間と左零空間：$[1, -1, -1][-1, -2, 1]^T = 0, [-1, 0, -1][-1, -2, 1]^T = 0$

7. 行列 $\boldsymbol{A}$ の作用に関して，以下の問いに答えよ．

(a) $\boldsymbol{A}$ の零空間にあるベクトルを $\boldsymbol{x}_n \neq \boldsymbol{0}$ とするとき，もし，$\boldsymbol{x}$ が $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の解であるならば，$\boldsymbol{x} + \boldsymbol{x}_n$ も解であることを示せ．

［解答］

$\boldsymbol{A}$ の零空間にあるベクトル $\boldsymbol{x}_n$ に対しては，$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_n = \boldsymbol{0}$ であるから，

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{x}_n) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$

が成り立ち，$\boldsymbol{x} + \boldsymbol{x}_n$ も解となる．

（参考）$\boldsymbol{A}$ の零空間が零でないベクトルを含むときは,（解があるとすれば）不定解となる．

(b) $\boldsymbol{A}$ の行空間にあるベクトルを $\boldsymbol{x}_r$ とするとき，$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_r = \boldsymbol{b}$ を満たす解は唯一であることを示せ.（ヒント：$\boldsymbol{x}_r$ と $\boldsymbol{x}'_r$ が解であると仮定して，$\boldsymbol{x}_r = \boldsymbol{x}'_r$

となることを示す.）

［解答］

$\boldsymbol{x}_r$ と $\boldsymbol{x}'_r$ が解であると仮定する.

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_r &= \boldsymbol{b}\\ \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}'_r &= \boldsymbol{b}\end{aligned}$$

これらの方程式の差をとる.

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}_r - \boldsymbol{x}'_r) = \boldsymbol{0}$$

上式から，ベクトル $\boldsymbol{x}_r - \boldsymbol{x}'_r$ は $\boldsymbol{A}$ の行空間のベクトルであると同時に，零空間のベクトルでもある．行空間と零空間は直交しているから，双方に含まれるベクトルは零ベクトルのみである．$\boldsymbol{x}_r - \boldsymbol{x}'_r = \boldsymbol{0}$ より，$\boldsymbol{x}_r = \boldsymbol{x}'_r$ となり，$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_r = \boldsymbol{b}$ を満たす解は唯一である.