線形代数学第１－中間試験問題－

情報システム工学科１年生　　平成１９年度前期－ 2007.5.16 －

1. 次のベクトル，行列の計算を行え．計算が不可能な場合は「計算不可」と答えること．

$$(a)\ \begin{bmatrix} 2 & 0 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \end{bmatrix} \quad (b)\ \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 3 & -5 \end{bmatrix} \quad (c)\ \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(d)\ \begin{bmatrix} 4 & -5 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 3 & -5 & 2 \\ 2 & -3 & 4 \end{bmatrix} \quad (e)\ \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \quad (f)\ \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

2. 次の行列 $\boldsymbol{A}$ と交換可能な行列 $\boldsymbol{B}$ を求めよ．また，そのときの $\boldsymbol{AB}$ を求めよ．但し，$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}, \boldsymbol{I}$ は自明であるので，これら以外の行列を求めること．

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

3. 次式を満たす 2×2 行列の例を求めよ．
 (a) $\boldsymbol{A}^2 = -\boldsymbol{I}$
 (b) $\boldsymbol{B}^2 = \boldsymbol{0}, \qquad \boldsymbol{B} \neq \boldsymbol{0}$

4. 次の行列を LDU に分解せよ。

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

5. 次の行列の逆行列を *Gauss-Jordan* 法により求めよ．

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

6. 次の行列 $\boldsymbol{A}$ の逆行列は存在するか.「逆行列は存在する」又は「逆行列は存在しない」と答え，その理由を示せ．但し，逆行列を求める必要はない.（ヒント）行列 $\boldsymbol{A}$ は「ある行の何倍かをある行に足す（引く）」ことにより，単位行列 $\boldsymbol{I}$ に変換できるとき，逆行列を持つ．$\boldsymbol{A}$ をガウスの前進消去で上三角行列に変形したとき，要素が全て零となる行が生じる場合は，$\boldsymbol{I}$ に変換できない．また，$\boldsymbol{A}$ において，ある行が他の（複数の）行を何倍かして（足すことにより）求まるとき，逆行列は存在しない．

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \\ 0 & 2 & -2 \end{bmatrix}$$

7. 次の条件を満たす２元連立方程式の例を与え，このような解を持つことを示せ．
 (a) 唯一組の解を持つ．
 (b) 無限に多くの解を持つ．
 (c) 解を持たない．

8. $\boldsymbol{A}$ の列ベクトルを $\boldsymbol{a}_1$，$\boldsymbol{a}_2$，$\boldsymbol{a}_3$ とするとき，$\boldsymbol{AB}$ の第１列は $\alpha_1\boldsymbol{a}_1 + \alpha_2\boldsymbol{a}_2 + \alpha_3\boldsymbol{a}_3 \cdots (1)$ として表すことが出来る．次の例を用いて式 (1)（の α_i と $\boldsymbol{a}_i$）を具体的な数値で表せ．また，式 (1) から計算されるベクトルが $\boldsymbol{AB}$ の第１列と等しくなることを示せ．

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$$