線形代数学第１－中間試験問題＜解答例＞

情報システム工学科１年生　　　平成１９年度前期－ 2007.5.16 －

1. 次のベクトル，行列の計算を行え．計算が不可能な場合は「計算不可」と答えること．

$$(a)\begin{bmatrix} 2 & 0 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \end{bmatrix} = 2\times 1 + 0\times 4 + (-3)\times(-1) = 5 \qquad (1)$$

$$(b)\quad \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 3 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5\times 1 & 5\times 3 & 5\times(-5) \\ (-2)\times 1 & (-2)\times 3 & (-2)\times(-5) \\ 1\times 1 & 1\times 3 & 1\times(-5) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 5 & 15 & -25 \\ -2 & -6 & 10 \\ 1 & 3 & -5 \end{bmatrix} \qquad (2)$$

$$(c)\begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -4 & -1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \qquad (3)$$

$$(d)\begin{bmatrix} 4 & -5 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 3 & -5 & 2 \\ 2 & -3 & 4 \end{bmatrix} \qquad \text{計算不可} \qquad (4)$$

$$(e)\begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 3 \end{bmatrix} \qquad (5)$$

$$(f)\begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} \qquad \text{計算不可} \tag{6}$$

2. 行列 $\boldsymbol{B}$ を

$$\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \tag{7}$$

とする．$\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{BA}$ より

$$\begin{bmatrix} 2a-c & 2b-d \\ -a+c & -b+d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2a-b & -a+b \\ 2c-d & -c+d \end{bmatrix} \tag{8}$$

となる．上式を各要素の式に分解する．

$$2a-c = 2a-b \tag{9}$$

$$2b-d = -a+b \tag{10}$$

$$-a+c = 2c-d \tag{11}$$

$$-b+d = -c+d \tag{12}$$

上式で，式 (9) と (12) は等価であり，$b=c$ となる．これを式 (10) と (11) に代入すれば，これらも等価であり．$a+b-d=0$ となる．単位行列 $\boldsymbol{I}$ と $\boldsymbol{A}$ を除くために $b=1$ とする．従って，$c=1$ となる．さらに，$a-d=-1$ より，$a=1$ とすれば $d=2$ を得る．従って，$\boldsymbol{B}$ の一つの解として

$$\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \tag{13}$$

を得る．これを用いて $\boldsymbol{AB}$ と $\boldsymbol{BA}$ を計算する．

$$\boldsymbol{AB} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{14}$$

$$\boldsymbol{BA} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{15}$$

これらの結果より，$\boldsymbol{AB}$ と $\boldsymbol{BA}$ が等しいことが分かる．また，$\boldsymbol{B}$ は $\boldsymbol{A}$ の逆行列になっている．

3(a) $\boldsymbol{A}$ を

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \tag{16}$$

とする．条件より

$$\boldsymbol{A}^2 = \begin{bmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ac+cd & bc+d^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \tag{17}$$

各要素を対応させることにより，次の条件を得る．

$$a^2+bc = bc+d^2 = -1 \tag{18}$$

$$ac+cd = ab+bd = 0 \tag{19}$$

式 (19) より，

$$c(a+d) = b(a+d) = 0 \tag{20}$$

ここで，$a+d=0$ とおく．式 (18) より，$a^2=d^2$ であるから，

$$a=1, d=-1 \tag{21}$$

とする．これを式 (18) に代入すると，$bc=-2$ となるから，例えば，

$$b=1, c=-2 \tag{22}$$

が一つの解となる．以上をまとめると，

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \tag{23}$$

(b) $\boldsymbol{B}$ も上の $\boldsymbol{A}$ と同じにおく．$\boldsymbol{B}^2=\boldsymbol{0}$ より，式 (18)，(19) を参照して，次の条件を得る．

$$a^2+bc = bc+d^2 = 0 \tag{24}$$

$$ac+cd = ab+bd = 0 \tag{25}$$

式 (25) を次のように変形する．

$$c(a+d) = b(a+d) = 0 \tag{26}$$

ここで，$b=0, c=0$ とすると，式 (24) より，$a=d=0$ となり，$\boldsymbol{B} \neq \boldsymbol{0}$ という条件に反する．従って，$a+d=0$ とおく．一つの解として，$a=1, d=-1$

を得る．これらを式 (24) に代入して，$bc=-1$ となる．一つの解として，$b=1, c=-1$ を得る．以上をまとめて $\boldsymbol{B}$ を得る．

$$\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \tag{27}$$

4. 行列 $\boldsymbol{A}$ に対してガウスの前進消去を行う．

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 11/3 \end{bmatrix} \tag{28}$$

ガウスの前進消去では次の演算が行われた．

(a) 第 1 行の -2 倍を第 2 行から引く．

(b) 第 1 行の -1 倍を第 3 行から引く．

(c) 第 2 行の $2/3$ を第 3 行から引く．

従って，行列 $\boldsymbol{L}$ は次式で与えられる．

$$\boldsymbol{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & 2/3 & 1 \end{bmatrix} \tag{29}$$

さらに，式 (28) の最後の行列は次のように分解できる．

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 11/3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 11/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1/3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \boldsymbol{DU} \tag{30}$$

以上より，

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{LDU} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & 2/3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 11/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1/3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{31}$$

5. 行列 $[\boldsymbol{A}|\boldsymbol{I}]$ に対してガウスの前進消去，後退代入，対角要素の正規化を行う．

$$\begin{aligned}
[\boldsymbol{A}|\boldsymbol{I}] &= \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right] \\
&\rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -5/2 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right] \\
&\rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 2 & 0 & -5/2 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right] \\
&\rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 1 & 0 & -5/4 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 0 & 1 & -1/2 & -1/2 & 1/2 \end{array}\right] \qquad (32)
\end{aligned}$$

上の行列の右側が $\boldsymbol{A}$ の逆行列に相当するから，

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \begin{bmatrix} -1/4 & 1/4 & 1/4 \\ -5/4 & 1/4 & 1/4 \\ -1/2 & -1/2 & 1/2 \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -5 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & 2 \end{bmatrix} \qquad (33)$$

6. 行列 $\boldsymbol{A}$ に対してガウスの前進消去を行う．

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \\ 0 & 2 & -2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 4 & -4 \\ 0 & 2 & -2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & -4 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad (34)$$

このように，ガウスの前進消去において零の行が発生する．これに対して，ガウスの後退代入→正規化を行っても単位行列に変換できない．従って，$\boldsymbol{A}$ の逆行列は存在しない．

7. 次の条件を満たす２元連立方程式の例を示す．

(a) 唯一組の解を持つ．→２つの方程式が独立である．

$$u + v = 1 \qquad (35)$$

$$u - v = 0 \qquad (36)$$

(b) 無限に多くの解を持つ．→ 2 つの方程式が従属（乗数倍の関係）である．

$$\begin{aligned} u - v &= 1 \quad (37) \\ -u + v &= -1 \quad (38) \end{aligned}$$

(c) 解を持たない．→ 2 つの方程式が矛盾する．

$$\begin{aligned} u - v &= 1 \quad (39) \\ -u + v &= 1 \quad (40) \end{aligned}$$

8. $\boldsymbol{AB}$ の第 1 列は次のようになる．

$$1 \times \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \end{bmatrix} \quad (41)$$

これは，次に示すように，$\boldsymbol{AB}$ から計算される第 1 列に等しい．

$$\boldsymbol{AB} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -5 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \quad (42)$$