

# 線形代数学第 1 - 期末試験問題 -

電子情報学類 1 年生 ( 1 組 )

平成 2 0 年度前期 - 2008.7.30 -

試験中に使用できるものは筆記用具の他に、汗を拭くためのタオルやハンカチ、ティッシュペーパー、携帯電話 (時計機能のみ使用可でキータッチは不可)

1. 次の問いに答えよ .

- (a)  $Ax = Ay$  であるとき、必ず  $x = y$  となるとき、 $A$  の零空間を求めよ .
- (b)  $n \times n$  行列  $A$  の全ての列ベクトルが線形独立ならば、 $A^2$  の全ての列ベクトルも線形独立であることを示せ ( ヒント )  $A$  及び  $A^2$  の零空間の次元に着目する .
- (c)  $Ax = b$  が解を持つための必要十分条件は  $b$  が  $A$  の 4 つの基本部分空間のどれに含まれるときであるか . 理由も述べること .
- (d) 行空間が  $[1, 1, -1]^T, [0, 1, -1]$  で張られ、零空間が  $[0, 1, 1]$  で張られるような行列が存在することを示せ .
- (e)  $n$  個の  $m$  次元ベクトルは  $n \leq m$  のとき線形独立となる可能性があることを示せ .

2. 次の方程式  $Ax = b$  の一般解を求めよ .  $Ax = 0$  の一般解と、 $Ax = b$  の特殊解の和の形で表せ .

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -2 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

3. 次の行列について擬似逆行列を求めよ .

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

4.  $R^3$  における次の 2 つの部分空間  $V$  と  $W$  の関係は「直交空間」、「補空間」、「直交補空間」、「いずれでもない」のいずれであるか答えよ . 理由も示すこと (ベクトルの直交性、ベクトルの独立性、2 つの空間の次元の和、等に着目) .  $R^3$  におけるベクトルを  $[x, y, z]^T$  と表す .

- (a)  $V : x$  軸,  $W : x - y$  平面 .
- (b)  $V : x$  軸,  $W : y - z$  平面 .
- (c)  $V : x - y$  平面上にある直線  $x + y = 0$ ,  $W : y - z$  平面上にある直線  $y - z = 0$
- (d)  $V : \text{ベクトルが } x + y = 0 \text{ を満たす部分空間}, W : \text{ベクトルが } y + z = 0 \text{ を満たす部分空間}$  ( (c) とは条件が異なることに注意 )

5. 以下の問いに答えよ .

- (a)  $R^3$  におけるベクトルを  $[x, y, z]^T$  と表す .  $x + y + z = 0$  を満たすベクトルからなる部分空間  $V$  の基底を求めよ . 基底は一つの例を求めること .
- (b) 上記の部分空間  $V$  の直交補空間を求めよ .

6. 行列  $A$  の零空間がベクトル  $v_1 = [1, 0, 2, -1]^T$ ,  $v_2 = [-2, 1, -1, 1]^T$ ,  $v_3 = [-1, 1, 1, 0]^T$  で張られるとき、行列  $A$  を求めよ .

7. 次の行列に付随する 4 つの基本部分空間 ( 行空間, 零空間, 列空間, 左零空間 ) を求めよ ( 空間の次元と基底を求める ) . さらに、行空間と零空間、及び列空間と左零空間が直交すること確かめよ . ( 基底が直交することを示す ) .

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$