線形代数学第１－中間試験問題＜解答例＞

電子情報学類１年生（１組）　　平成２０年度前期－ 2008.5.28 －

1. 次のベクトル，行列の計算を行え．計算が不可能な場合は「計算不可」と答えること（3 点× 6 題=18 点）．

$$(a)\ \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix} \qquad (b)\ \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$(c)\ \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \qquad (d)\ \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \\ -2 & -2 & -3 \end{bmatrix}$$

$$(e)\ \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ -3 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad (f)\ \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \end{bmatrix}$$

＜解答例＞

(a) $2 + 1 = 3$

(b)

$$\begin{bmatrix} 2 & -4 & 6 \\ -1 & 2 & -3 \\ 3 & -6 & 9 \end{bmatrix}$$

(c) 計算不可

(d)

$$\begin{bmatrix} 3 & -4 & 1 \\ -6 & 0 & -7 \end{bmatrix}$$

(e)

$$\begin{bmatrix} 6 & 8 \end{bmatrix}$$

(f) 計算不可

2. 次の命題は正しいか否か．理由をつけて示せ（4 点× 5 題=20 点）．

(a) $\boldsymbol{A}$ の第１列と第３列が等しければ，$\boldsymbol{AB}$ の第１列と第３列も等しい．

(b) $\boldsymbol{A}$ の第１行と第３行が等しければ，$\boldsymbol{AB}$ の第１行と第３行も等しい．

(c) $\boldsymbol{B}$ の第１列と第３列が等しければ，$\boldsymbol{AB}$ の第１列と第３列も等しい．

(d) $\boldsymbol{B}$ の第１行と第３行が等しければ，$\boldsymbol{AB}$ の第１行と第３行も等しい．

(e) $(\boldsymbol{AB})^2 = \boldsymbol{A}^2\boldsymbol{B}^2$.

＜解答例＞

$\boldsymbol{A}$ の第 i 行を $\boldsymbol{a}_{ri}^T$，第 i 列を $\boldsymbol{a}_{ci}$，$\boldsymbol{B}$ の第 i 行を $\boldsymbol{b}_{ri}^T$，第 i 列を $\boldsymbol{b}_{ci}$ とする．

(a) 「正しくない」（理由）$\boldsymbol{AB}$ の第 i 列は，$\boldsymbol{A}$ の全ての行ベクトルと $\boldsymbol{B}$ の第 i 列のベクトルの内積で決まり，$[\boldsymbol{a}_{r1}^T\boldsymbol{b}_{ci}, \boldsymbol{a}_{r2}^T\boldsymbol{b}_{ci}, \cdots, \boldsymbol{a}_{rn}^T\boldsymbol{b}_{ci}]^T$ となる．命題では，$\boldsymbol{B}$ の第１列と第３列が等しいとは限らない．

(b) 「正しい」（理由）$\boldsymbol{AB}$ の第 i 行は，$\boldsymbol{A}$ の第 i 行のベクトルと $\boldsymbol{B}$ の全ての列ベクトルの内積で決まり，$[\boldsymbol{a}_{ri}^T\boldsymbol{b}_{c1}, \boldsymbol{a}_{ri}^T\boldsymbol{b}_{c2}, \cdots, \boldsymbol{a}_{ri}^T\boldsymbol{b}_{cn}]$ となる．従って，$\boldsymbol{A}$ の第１行と第３行が等しければ，$\boldsymbol{AB}$ の第１行と第３行も等しい．

(c) 「正しい」（理由）$\boldsymbol{AB}$ の第 i 列は，$\boldsymbol{A}$ の全ての行ベクトルと $\boldsymbol{B}$ の第 i 列のベクトルの内積で決まり，$[\boldsymbol{a}_{r1}^T\boldsymbol{b}_{ci}, \boldsymbol{a}_{r2}^T\boldsymbol{b}_{ci}, \cdots, \boldsymbol{a}_{rn}^T\boldsymbol{b}_{ci}]^T$ となる．従って，$\boldsymbol{B}$ の第１列と第３列が等しければ，$\boldsymbol{AB}$ の第１列と第３列も等しい．

(d) 「正しくない」（理由）$\boldsymbol{AB}$ の第 i 行は，$\boldsymbol{A}$ の第 i 行のベクトルと $\boldsymbol{B}$ の全ての列ベクトルの内積で決まり，$[\boldsymbol{a}_{ri}^T\boldsymbol{b}_{c1}, \boldsymbol{a}_{ri}^T\boldsymbol{b}_{c2}, \cdots, \boldsymbol{a}_{ri}^T\boldsymbol{b}_{cn}]$ となる．命題では，$\boldsymbol{A}$ の第１行と第３行が等しいとは限らない．

(e) 「正しくない」（理由）$(\boldsymbol{AB})^2 = \boldsymbol{ABAB} \neq \boldsymbol{AABB} = \boldsymbol{A}^2\boldsymbol{B}^2$．一般に行列の積は交換可能ではない．

3.　次の連立方程式をガウスの前進消去と後退代入により解け．前進消去の途中で行の交換が必要となるが，この行の交換を行う行列 $\boldsymbol{P}$ も求めよ（10 点）．

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

＜解答例＞

ガウスの前進消去を行う.

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

上式で，第２行と第３行を入れ替える.

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

上式より，ガウスの後退代入により，$w \to v \to u$ の順に解が求まる.

$$w = 1 \qquad v = 0 \qquad u = 1$$

第２行と第３行を入れ替える行列 $\boldsymbol{P}$ は単位行列で第２行と第３行を入れ替えて求められる.

$$\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

4. 次の行列を LDU に分解せよ（15 点）.

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

＜解答例＞
ガウスの前進消去を行う.
(1) 第１行の-2 倍を第２行から引く.
(2) 第１行の-1 倍を第３行から引く.

$$\boldsymbol{A} \to \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \end{bmatrix}$$

(3) 第 2 行の 1/2 倍を第 3 行から引く．

$$\boldsymbol{U} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -5/2 \end{bmatrix}$$

この結果から，行列 $\boldsymbol{L}$ が次のように求まる．

$$\boldsymbol{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & 1/2 & 1 \end{bmatrix}$$

対角行列 $\boldsymbol{D}$ の対角要素は行列 $\boldsymbol{U}$ の対角要素に等しいから，

$$\boldsymbol{D} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -5/2 \end{bmatrix}$$

行列 $\boldsymbol{U}$ は，さらに，各行列を対角要素で割る．

$$\boldsymbol{U} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

以上より

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A} &= \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -3 \end{bmatrix} \\ &= \boldsymbol{LDU} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & 1/2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -5/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

5. 次の行列の逆行列を *Gauss-Jordan* 法により求めよ（17 点）．

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

＜解答例＞

$$
\begin{aligned}
[\boldsymbol{A}|\boldsymbol{I}] &= \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \\
&\to \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 5 & -2 & 1 \end{array}\right] \\
&\to \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -2/3 & 2/3 & -1/3 \\ 0 & 1 & 0 & -1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & -3 & 5 & -2 & 1 \end{array}\right] \\
&\to \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -2/3 & 2/3 & -1/3 \\ 0 & 1 & 0 & -1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1 & -5/3 & 2/3 & -1/3 \end{array}\right]
\end{aligned}
$$

以上より，

$$
\boldsymbol{A}^{-1} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -2 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -5 & 2 & -1 \end{bmatrix}
$$

6. 次の行列 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ の逆行列は存在するか.「逆行列は存在する」又は「逆行列は存在しない」と答え，その理由を示せ．但し，逆行列を求める必要はない（5 点× 2 題=10 点）.（ヒント）行列 $\boldsymbol{A}$ の逆行列は *Gauss-Jordan* 法によれば，$\boldsymbol{A}$ を単位行列 $\boldsymbol{I}$ に変形する操作と同じ操作を単位行列 $\boldsymbol{I}$ に対して行うことにより得られる．$\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ をガウスの前進消去（必要であれば，行の入れ替えを行う）で $\boldsymbol{U}$ に変形し，$\boldsymbol{U}$ の形に基づいて理由を示せ.（$\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{B}$ は独立した問題）

$$
\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 3 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}
$$

＜解答例＞

Gauss-Jordan 法により，行列 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ を単位行列に変形することが可能であ

れば，それらの逆行列が存在する．逆に，単位行列に変形できない場合は，逆行列は存在しない．行列 $\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{B}$ にガウスの前進消去を行う．

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 3 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 7/3 \end{bmatrix}$$

行列 $\boldsymbol{A}$ では，ガウスの前進消去により，零の行が発生する．この場合は，単位行列への変形は不可能であり，逆行列は存在しない．一方，行列 $\boldsymbol{B}$ では，ガウスの前進消去により，対角要素が全て非零であり，これを単位行列に変形することは可能である．従って，逆行列が存在する．

7. 次の方程式が解を持つために b_1, b_2, b_3 が満たすべき条件を求めよ．この条件が成り立つとき，この連立方程式はどのような解を持つか（一意解，不定解，不能解のいずれかを答えよ）（10 点）．

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \\ -1 & 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

＜解答例＞
上記の方程式をガウスの前進消去により変形する．

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 + b_1 \\ b_3 - b_2 - 2b_1 \end{bmatrix}$$

３行目の方程式は

$$0 = b_3 - b_2 - 2b_1$$

となる．従って，解を持つためには b_1, b_2, b_3 がこの条件を満たすことが必要十分条件である．
次に，この条件が成り立つ場合，未知数の数が３で方程式の数が２であるから,「不定解」を持つ．