線形代数学第１－期末試験問題－

電子情報学類１年生（１組）　　　平成２１年度前期－ 2009.7.29 －

試験中に使用できるものは筆記用具の他に，汗を拭くためのタオルやハンカチ，ティッシュペーパ，携帯電話（時計機能のみ使用可でキータッチは不可）

1.　ベクトルの線形独立に関する以下の問に答えよ．

(a) 3 個の 2 次元ベクトルは線形従属となることを示せ．

(b) 3×3 の単位行列の列ベクトルは線形独立であることを示せ．

(c) 次の 3 個のベクトルが線形独立であるかどうかを調べよ．

$\boldsymbol{v}_1 = [1, 0, -1, -2]^T, \boldsymbol{v}_2 = [-1, 2, 1, 2]^T, \boldsymbol{v}_1 = [1, 2, -1, -2]^T$

2. ベクトルの線形独立と直交に関する以下の問に答えよ．

零でないベクトル $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ を考える．$\boldsymbol{x}$ を $\boldsymbol{y}$ に含まれる成分 $\boldsymbol{x}_1$ と $\boldsymbol{y}$ に直交する成分 $\boldsymbol{x}_2$ に分解する．

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x} &= \boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2 \\ \boldsymbol{x}_1 &= c\boldsymbol{y} \\ \boldsymbol{x}_2^T \boldsymbol{y} &= 0 \end{aligned}$$

(a) $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ が線形独立である条件を求めよ．

(b) $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ が直交するための条件を求めよ．

3. 空間 V の基底を $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ とするとき，次式で得られるベクトル $\boldsymbol{w}_i, i = 1, 2, 3$ も基底となる条件を求めよ．

$$\boldsymbol{w}_i = c_{i1}\boldsymbol{v}_1 + c_{i2}\boldsymbol{v}_2 + c_{i3}\boldsymbol{v}_3, i = 1, 2, 3$$

（参考）

$$d_1\boldsymbol{w}_1 + d_2\boldsymbol{w}_2 + d_3\boldsymbol{w}_3 = \boldsymbol{0}$$

を満たす d_i が自明な解（$d_i = 0$）のみを持つための条件を考える．$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ が線形独立である条件も考慮する．その条件を，c_{ij} を第 j 行，第 i 列の要素とする行列 $\boldsymbol{C}$ の性質として考える．

4. 次の方程式 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の一般解を求めよ。$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の一般解と，$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の特殊解の和の形で表せ。

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

5.　ベクトル空間に関して，以下の問に答えよ．

(a) ベクトル $\boldsymbol{v}_1 = [1, -1, 0, -2]^T$，$\boldsymbol{v}_2 = [-1, 0, -1, 1]^T$，$\boldsymbol{v}_3 = [-1, -1, -2, 0]^T$ で張られる空間 V の次元と基底を求めよ．

(b) 上記の空間 V に対する直交補空間 W を求めよ．(W の次元と基底を求める）

6. 次の行列に付随する４つの基本部分空間（行空間，零空間，列空間，左零空間）を求めよ（空間の次元と基底を求める）．さらに，行空間と零空間，及び列空間と左零空間が直交することを確かめよ．(基底が直交することを示す).

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$