平成21年度前期

線形代数学第1　期末試験 解答例

2009.7.29

1. (a) 3個の2次元ベクトルを

$$\boldsymbol{a}_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{12} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_2 = \begin{bmatrix} a_{21} \\ a_{22} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_3 = \begin{bmatrix} a_{31} \\ a_{32} \end{bmatrix}$$

とする.

$$c_1 \boldsymbol{a}_1 + c_2 \boldsymbol{a}_2 + c_3 \boldsymbol{a}_3 = \boldsymbol{0} \qquad \text{---}(1)$$

を満す $c_1 \sim c_3$ が零でない解を持つことを示す.
式(1)は次のように書ける.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

上式における行列の階数 r は高々2である. $r \leq 2$
未知数は3個であり, 自由変数の数は $3 - r \geq 1$ となり,
この方程式は不定解を持つ. 従って, 零でない解を有する.

(b) 列ベクトルを $\boldsymbol{a}_1 = [1\ 0\ 0]^T$, $\boldsymbol{a}_2 = [0\ 1\ 0]^T$, $\boldsymbol{a}_3 = [0\ 0\ 1]^T$
とする. (a)の式(1)と同じ方程式を作る.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

これより, 解は $c_1 = c_2 = c_3 = 0$ のみとなる. 従って, $\boldsymbol{a}_1 \sim \boldsymbol{a}_3$
は線形独立である.

(c) $c_1 \boldsymbol{v}_1 + c_2 \boldsymbol{v}_2 + c_3 \boldsymbol{v}_3 = \boldsymbol{0}$
を満す $c_1 \sim c_3$ を求める. 上式は次のように表される.

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ガウスの前進消去より，

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

行列の階数は $r=2$，未知数の数は3，従って，自由変数の数は $3-2=1$ となり，不定解を持つため，$c_1 \sim c_3$ は零以外の解を持ち $\underline{v_1 \sim v_3 \text{ は線形従属}}$ となる．

2. (a) $c_1 x + c_2 y = (c_1 c + c_2) y + c_1 x_2 = 0$
上式に左から y^T を掛けた式と，x_2^T を掛けた式を作る．

$$\begin{cases} (c_1 c + c_2) y^T y = 0 & \cdots (2) \\ c_1 x_2^T x_2 = 0 & \cdots (3) \end{cases}$$

式(3)より，$c_1 = 0$ となるためには $x_2 \neq 0$ が必要．$c_1 = 0$ であるとすると，式(2)と $y \neq 0$ より $c_2 = 0$ となる．従って，x と y が線形独立である必要十分条件は $\underline{x_2 \neq 0}$ である．

(b) $x^T y = (x_1 + x_2)^T y = x_1^T y = c\, y^T y = c \|y\|^2$

直交する条件 $x^T y = 0$ と $y \neq 0$ より，$c = 0$ となる．
すなわち，x と y が直交する必要十分条件は $x_1 = 0$ となる．

3. $d_1 w_1 + d_2 w_2 + d_3 w_3 = 0$
を満す $d_1 \sim d_3$ が自明な解 $(=0)$ のみを持つ条件を考える．上式を $v_1 \sim v_3$ で表す．

$$(d_1 c_{11} + d_2 c_{21} + d_3 c_{31}) v_1 + (d_1 c_{12} + d_2 c_{22} + d_3 c_{32}) v_2 + (d_1 c_{13} + d_2 c_{23} + d_3 c_{33}) v_3 = 0 \quad \cdots (4)$$

$v_1 \sim v_3$ は線形独立であるから式(4)における $v_1 \sim v_3$ の係数は零である．これを行列の形で表すと次のようになる．

$$\begin{bmatrix} c_{11} & c_{21} & c_{31} \\ c_{12} & c_{22} & c_{32} \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \mathbb{C}\mathbb{d} = \mathbb{0}$$

上の方程式が自明な解 $(d_1 = d_2 = d_3 = 0)$ のみを持つための必要十分条件は行列 $\mathbb{C}$ が正則（$\mathbb{C}$ の階数が $r=3$ / $\mathbb{C}$ がフルランク / $\mathbb{C}$ の逆行列が存在する）であることである．

4.　$A\mathbb{x} = \mathbb{0}$ の一般解を求める．

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ガウスの前進消去を行う．

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

w を自由変数として上式を解く．

$$\begin{cases} u + 2w = 0 \\ \quad v + 3w = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{array}{l} u = -2w \\ v = -3w \end{array}$$

$$\mathbb{x} = w\begin{bmatrix} -2 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$A\mathbb{x} = \mathbb{b}$ の特殊解を求める．$w = 0$ とおく．

$$\begin{cases} u = 1 \\ -2u + v = -2 \end{cases} \rightarrow \begin{array}{l} u = 1 \\ v = 0 \end{array} \rightarrow \mathbb{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$x = w\begin{bmatrix}-2\\-3\\1\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$$

5. (a) ベクトル $v_1 \sim v_3$ が張る空間を行列Aの行空間とする.

$$A = \begin{bmatrix}1 & -1 & 0 & -2\\-1 & 0 & -1 & 1\\-1 & -1 & -2 & 0\end{bmatrix}$$

Aをガウスの前進消去により, 行列Uに変換する.

$$A = \begin{bmatrix}1 & -1 & 0 & -2\\-1 & 0 & -1 & 1\\-1 & -1 & -2 & 0\end{bmatrix} \rightarrow U = \begin{bmatrix}1 & -1 & 0 & -2\\0 & -1 & -1 & -1\\0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

Aの行空間の基底はUの零でない行ベクトルで与えられる.

基底: $[1\ -1\ 0\ -2]^T$, $[0\ -1\ -1\ -1]^T$
次元: 2次元 ･･･ 基底の数に相当 (階数に相当)

(b) Aの行空間に対する直交補空間はAの零空間である.

$Ax = 0 \rightarrow Ux = 0$ より

$$\begin{bmatrix}1 & -1 & 0 & -2\\0 & -1 & -1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u\\v\\w\\y\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} u - v - 2y = 0 \\ -v - w - y = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} v = -w - y \\ u = -w + y \end{cases}$$

$$x = w\begin{bmatrix}-1\\-1\\1\\0\end{bmatrix} + y\begin{bmatrix}1\\-1\\0\\1\end{bmatrix}$$

基底：$[-1\ -1\ \ 1\ \ 0]^T$, $[1\ -1\ \ 0\ \ 1]^T$
次元：2次元

(参考) 全空間：4次元 $=$ V の次元(2) $+$ 直交補空間の次元(2)
基底が互いに直交(内積$=0$)していることも分かる.

6. <u>行空間</u>　　A を $m \times n$ 行列とする ($m=3,\ n=4$)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow U = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$
階数 $r=2$

基底：$[1\ 0\ 2\ -1]^T$, $[0\ 1\ 2\ 0]^T$
次元：2次元 $(=r)$

<u>零空間</u>　$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ より

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} u + 2w - y = 0 \\ v + 2w = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} u = -2w + y \\ v = -2w \end{cases}$$

$$x = w \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

基底：$[-2\ -2\ \ 1\ 0]^T$, $[1\ \ 0\ \ 0\ \ 1]^T$
次元：2次元 $(= n-r)$

列空間　行列 U における線形独立な列ベクトルと同じ位置に行列 A の線形独立な列ベクトルがある.

基底：$[1\ -1\ -1]^T$, $[0\ 1\ 2]^T$
次元：　2次元 $(=r)$
(参考) 線形独立な列ベクトルの組合せは他にもある.
例として,
$[1\ -1\ -1]^T$, $[2\ 0\ 2]^T$
$[0\ 1\ 2]$, $[-1\ 1\ 1]^T$

左零空間　$y^TA=0 \rightarrow A^Ty=0$ より

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} u-v-w=0 \\ v+2w=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} v=-2w \\ u=-w \end{cases}$$

$$y=w\begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

基底：　$[-1\ -2\ 1]^T$
次元：　1次元 $(=m-r)$

行空間と零空間の直交性 (基底が直交する(内積=0)を示す.)

$$[1\ 0\ 2\ -1]\begin{bmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}=-2+2=0,\quad [1\ 0\ 2\ -1]\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}=1-1=0$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = -2+2=0, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 0$$

列空間と左零空間の直交性

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} = -1+2-1=0$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} = -2+2 = 0$$