線形代数学第１ー期末試験問題ー

電子情報学類１年生（１組）　　　平成２２年度前期ー 2010.8.4 ー

1. $\boldsymbol{A} \neq \boldsymbol{B}$ であるが，行空間が等しい 3×3 行列 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ の例を示せ．
（参考）ガウスの前進消去により，行空間は変化しない．

2. 線形独立なベクトル m 次元ベクトル $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_n$ の線形結合で得られる m 次元ベクトル $\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \cdots, \boldsymbol{w}_n$ が線形独立となるための条件を以下の手順で求めよ．
(a) $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_n$ を列ベクトルとする $m \times n$ 行列を $\boldsymbol{V}$，$\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \cdots, \boldsymbol{w}_n$ を列ベクトルとする $m \times n$ 行列を $\boldsymbol{W}$ とすると，これらは次のように表される．

$$\boldsymbol{W} = \boldsymbol{V}\boldsymbol{H}$$

$\boldsymbol{H}$ は結合係数を要素とする $n \times n$ 行列である．$\boldsymbol{H}$ の第 i 行，第 j 列の要素を h_{ij} とするとき，$\boldsymbol{w}_k$ を $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_n$ と $\boldsymbol{H}$ の要素を用いて表せ．
(b) $\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \cdots, \boldsymbol{w}_n$ が線形独立となるための条件は，次式において，$\boldsymbol{c}$ が自明な解 $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{0}$ のみを持つことである．

$$\boldsymbol{W}\boldsymbol{c} = \boldsymbol{0} \tag{1}$$

この条件を $\boldsymbol{H}$ に対する条件 (*) に置き換えよ．
（参考）$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_n$ は線形独立であるから，$\boldsymbol{V}\boldsymbol{d} = \boldsymbol{0}$ を満たす $\boldsymbol{d}$ は零ベクトルのみである．
(*) 行ベクトルや列ベクトルが線形独立／線形従属，行列が正則／特異など．

3. 次の方程式を $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ と表す．以下の問に答えよ．

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

(a) ガウスの前進消去により，この方程式を変形し，解を持つための条件を b_1, b_2, b_3 で表せ．
(b) ベクトル $\boldsymbol{b}$ を行列 $\boldsymbol{A}$ の列ベクトルの線形結合で表し，上で求めた b_1, b_2, b_3 に対する条件を満たすことを示せ．

4. 次の方程式 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の一般解を求めよ。$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の一般解と，$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の特殊解の和の形で表せ。

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \end{bmatrix}$$

5. ベクトル $\boldsymbol{v} = [x, y, z]^T, x + y + z = 0$ で張られる空間 V に対する直交補空間 W を求めよ．

6. 次の行列に付随する４つの基本部分空間（行空間，零空間，列空間，左零空間）を求めよ（空間の次元と基底を求める）．さらに，行空間と零空間，及び列空間と左零空間が直交することを確かめよ．(基底が直交することを示す).

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$