線形代数学第２－中間試験問題－

情報システム工学科１年生　　平成１６年度後期－ 2005.1.12 －

1. ベクトル $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ がはさむ角度を θ とするとき，三角形の余弦定理に基づいて次式が成り立つことを示せ．

$$\cos\theta = \frac{\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{b}}{\|\boldsymbol{a}\|\|\boldsymbol{b}\|}$$

さらに，この関係に基づき，次の Schwarz の不等式が成り立つことを示せ．

$$|\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{b}| \leq \|\boldsymbol{a}\|\|\boldsymbol{b}\|$$

（参考）三角形の余弦定理：三角形 ABC において，辺 AB と AC がはさむ角度を θ，辺 AB，BC，AC の長さを各々a，b，c とすると，

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\theta$$

2. 直線 $y = C + D\cos t$ で３点 $(t, y) = (0, 2), (\pi/2, 3), (\pi, 5)$を近似するとき，誤差の二乗和を最小にするようにC, Dを求めよ.y,C,D,tはスカラーである．また，このグラフをt-y平面上に図示せよ．

3. ベクトル $\boldsymbol{b} = [1, -1, 1]^T$ をベクトル $\boldsymbol{a} = [1, 1, 0]^T$ 上の成分 $\boldsymbol{b}_1$ とこれに直交する成分 $\boldsymbol{b}_2$ に分解せよ．さらに，ベクトル $\boldsymbol{b}_1$ と $\boldsymbol{b}_2$ が直交することを確かめよ.（参考）ベクトル $\boldsymbol{a}$ 上の成分は $\boldsymbol{b}$ から $\boldsymbol{a}$ への射影である．また，$\boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}_1 + \boldsymbol{b}_2$ である．

4. 線形独立なベクトル $\boldsymbol{a}_1 = [1, 0, 1]^T, \boldsymbol{a}_2 = [1, 1, -1]^T, \boldsymbol{a}_3 = [0, 1, 2]^T$ を互いに直交するベクトル $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ に変換せよ（ベクトルの長さを１にする必要はない）．Gram-Schmidt の直交化法を利用する．

5. 次の問に答えよ．
   (a) 行列 $\boldsymbol{A}$ の行列式は固有値 λ_i の積に等しいことを証明せよ．

$$\det\boldsymbol{A} = \lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$$

   (b) 行列 $\boldsymbol{A}$ の対角要素 a_{ii} の和（トレース）は固有値 λ_i の和に等しいことを証明せよ．

$$a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn} = \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n$$

（参考）固有値は

$$\det(\boldsymbol{A} - \lambda\boldsymbol{I}) = 0$$

から計算される．行列式は各行，各列から１個の要素を選び，合計 n 個の要素の積の和として計算される．この計算で，対角要素の和が現れる項に着目する．さらに，恒等的に次の関係が成り立つ．

$$\det(\boldsymbol{A} - \lambda\boldsymbol{I}) = (\lambda_1 - \lambda)(\lambda_2 - \lambda)\cdots(\lambda_n - \lambda)$$

固有値の積は上の恒等式で λ にある値を代入して求める．固有値の和は $(-\lambda)^{n-1}$ の係数に着目する．

6. 次に示す行列式の性質（１），（２），（３），（４）のいずれかを用いて，性質（５）を証明せよ．
（１）行列式は一つの行に関して線形である．
（２）２つの行が交換されると行列式は符号を変える．
（３）単位行列の行列式は１である．
（４）２つの行が等しければ，行列式は零である．
（５）ある行列を何倍かして他の行に加える（から引く）ことにより，行列式は変わらない．

7. 次の行列式を求めよ．行列の性質１～１０，または行列式の適当な公式を用いて計算する．

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 2 & -5 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 3 & -4 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & -3 & -4 & 3 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 7 & -3 & 5 & 0 \\ 0 & -1 & 5 & -2 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{C}=\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & 1 \\ 5 & -2 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & 3 & 1 \\ -8 & 9 & 1 & 3 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{D}=\begin{bmatrix} 2 & -1 & 9 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & -8 & -5 & 3 \\ 2 & -3 & 5 & -6 \end{bmatrix}$$

8. 4×4 行列 $\boldsymbol{A}$ の階数が 3 であるとき，$\det \boldsymbol{A}$ を求めよ．理由も記すこと．