平成 16 年度後期
情報システム工学科１年生

線形代数学第２　中間試験－解答例－

1. ベクトル $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ が作る三角形において余弦定理を適用する。

$$\|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}\|^2 = \|\boldsymbol{a}\|^2 + \|\boldsymbol{b}\|^2 - 2\|\boldsymbol{a}\|\|\boldsymbol{b}\|\cos\theta \tag{1}$$

左辺を内積で表して展開する。

$$\begin{aligned} \|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}\|^2 &= (\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})^T(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}) \\ &= \boldsymbol{a}^T\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}^T\boldsymbol{b} - 2\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{b} = \|\boldsymbol{a}\|^2 + \|\boldsymbol{b}\|^2 - 2\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{b} \end{aligned} \tag{2}$$

これを余弦定理の左辺に代入して整理する。

$$\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{b} = \|\boldsymbol{a}\|\|\boldsymbol{b}\|\cos\theta \tag{3}$$

これより,

$$\cos\theta = \frac{\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{b}}{\|\boldsymbol{a}\|\|\boldsymbol{b}\|} \tag{4}$$

が成り立つ。次に,

$$|\cos\theta| \leq 1 \tag{5}$$

であるから，次の Schwarz の不等式が成り立つ.

$$|\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{b}| \leq \|\boldsymbol{a}\|\|\boldsymbol{b}\|$$

2. ３点を y と $\cos t$ に代入する.

$$\begin{aligned} C + D &= 2 \\ C + 0 \times D &= 3 \\ C - D &= 5 \end{aligned} \tag{6}$$

行列の形で表すと次のようになる.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C \\ D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix} \tag{7}$$

この方程式を $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ とすると，最小 2 乗解は $\bar{\boldsymbol{x}} = (\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{b}$ で与えられる.

$$\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \tag{8}$$

$$(\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A})^{-1} = \begin{bmatrix} 1/3 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix} \tag{9}$$

$$\begin{bmatrix} C \\ D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/3 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix} \tag{10}$$

$$= \begin{bmatrix} 10/3 \\ -3/2 \end{bmatrix} \tag{11}$$

最小 2 乗近似の式は次のようになる.

$$y = \frac{10}{3} - \frac{3}{2}\cos t \tag{12}$$

グラフは別に示す.

3. $\boldsymbol{b}_1$ はベクトル $\boldsymbol{b}$ からベクトル $\boldsymbol{a}$ 上への射影である.

$$\boldsymbol{b}_1 = \frac{\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{a}}\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0} \tag{13}$$

従って，$\boldsymbol{b}$ は $\boldsymbol{a}$ に直交している.

$$\boldsymbol{b}_2 = \boldsymbol{b} - \boldsymbol{b}_1 = \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{14}$$

また，$\boldsymbol{b}_1^T\boldsymbol{b}_2 = 0$ であるから，これらは直交している.
（注）問題としては，$\boldsymbol{b}_1 = \boldsymbol{0}$ とならない方が適切である.

4. Gram-Schmidt の直交化法を利用する.

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{v}_1 &= \boldsymbol{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} && (15)\\
\boldsymbol{v}_2 &= \boldsymbol{a}_2 - \frac{\boldsymbol{v}_1^T \boldsymbol{a}_2}{\boldsymbol{v}_1^T \boldsymbol{v}_1}\boldsymbol{v}_1 && (16)\\
\boldsymbol{v}_1^T \boldsymbol{a}_2 &= 0 && (17)\\
\boldsymbol{v}_1^T \boldsymbol{v}_1 &= 2 && (18)\\
\boldsymbol{v}_2 &= \boldsymbol{a}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} && (19)\\
\boldsymbol{v}_3 &= \boldsymbol{a}_3 - \frac{\boldsymbol{v}_1^T \boldsymbol{a}_3}{\boldsymbol{v}_1^T \boldsymbol{v}_1}\boldsymbol{v}_1 - \frac{\boldsymbol{v}_2^T \boldsymbol{a}_3}{\boldsymbol{v}_2^T \boldsymbol{v}_2}\boldsymbol{v}_2 && (20)\\
\boldsymbol{v}_1^T \boldsymbol{a}_3 &= 2 && (21)\\
\boldsymbol{v}_2^T \boldsymbol{a}_3 &= -1 && (22)\\
\boldsymbol{v}_2^T \boldsymbol{v}_2 &= 3 && (23)\\
\boldsymbol{v}_3 &= \boldsymbol{a}_3 - \boldsymbol{v}_1 + \frac{1}{3}\boldsymbol{v}_2 = \begin{bmatrix} -2/3 \\ 4/3 \\ 2/3 \end{bmatrix} && (24)
\end{aligned}$$

5(a) 行列 $\boldsymbol{A}$ の固有値を λ_i とすると次の恒等式が成り立つ.

$$\det(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I}) = (\lambda_1 - \lambda)(\lambda_2 - \lambda)\cdots(\lambda_n - \lambda)$$

これは λ に関する恒等式であるから，$\lambda = 0$ と置くことにより，

$$\det \boldsymbol{A} = \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n$$

を得る.

(b) 上の恒等式では $(-\lambda^{n-1})$ の係数が固有値の和になる．次に，固有値を計

算する行列式について考える.

$$\det(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I}) = \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} \tag{25}$$

行列式は，行列の各行及び各列で１個のみの要素が選択され，それらの積の和として求まる．従って，上式で $(-\lambda)^{n-1}$ の項が現れるのは対角要素の積になる．

$$(a_{11}-\lambda)(a_{22}-\lambda)\cdots(a_{nn}-\lambda) \tag{26}$$

この項で $(-\lambda)^{n-1}$ の係数は $a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn}$ となり，固有値の和と等しくなる．

6. 行列 $\boldsymbol{A}$ の第 i 行 $\boldsymbol{a}_i$ を k 倍して第 j 行 $\boldsymbol{a}_j$ に加えた行列を $\boldsymbol{B}$ とする．従って，$\boldsymbol{B}$ は $\boldsymbol{A}$ の第 j 行を $\boldsymbol{a}_j + k\boldsymbol{a}_i$ としたものである．$\boldsymbol{B}$ の行列式に性質１を適用する．すなわち，第 j 行に関する線形性より，

$$\det\boldsymbol{B} = \det\boldsymbol{A} + k\det\boldsymbol{B}' \tag{27}$$

ここで，$\boldsymbol{B}'$ は $\boldsymbol{A}$ において第 j 行を第 i 行で置き換えたものである．従って，第 i 行と第 j 行は等しく，性質４より，$\det\boldsymbol{B}'=0$ となり，

$$\det\boldsymbol{B} = \det\boldsymbol{A} \tag{28}$$

が証明できる．

7(a) $\boldsymbol{A}$ についてガウスの前進消去を行う．

$$\det\boldsymbol{A} = \begin{vmatrix} 2 & -5 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 3 & -4 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & -3 & -4 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -5 & 0 & -1 \\ 0 & 0.5 & 3 & -3.5 \\ 0 & 0 & -16 & 18 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \tag{29}$$

(b) 行列 $\boldsymbol{B}$ は下 3 角行列であるから，その行列式は対角要素の積である．

$$\det \boldsymbol{B} = 2 \times (-1) \times 5 \times (-2) = 20 \tag{30}$$

(c) 行列 $\boldsymbol{C}$ は第 1 行と第 3 行が同じであるから，行列式は 0 である．

(d) 行列 $\boldsymbol{D}$ の第 2 行は零であるから，行列式は 0 である．

8. 4×4 行列 $\boldsymbol{A}$ の階数が 3 であることは，$\boldsymbol{A}$ が特異行列であることになり，その行列式は 0 である．
（別法）行列 $\boldsymbol{A}$ をガウスの前進消去を行ったときに零でないピボットの数が階数であるから，階数 < 4 であることは，ガウスの前進消去後の行列で零になる行が現れ，行列式は 0 となる．