(平成17年度後期) 線形代数学第2 期末試験　　2006.2.8　

— 解答例 —

1. (ア)−1), (イ)−2), (ウ)−6), (エ)−8), (オ)−12), (カ)−13), (キ)−14), (ク)−15) 〈13)〜15)は入れ替わってもよい〉, (ケ)−23) (コ)−16), (サ)−17) 〈16), 17)は入れ替わってもよい〉.

2. 固有値を求める.

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 \\ 3 & -4-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(-4-\lambda)+6 = (\lambda+4)(\lambda-1)+6 = \lambda^2+3\lambda+2 = (\lambda+2)(\lambda+1) = 0 \quad \text{より}$$

$$\lambda_1 = -2,\ \lambda_2 = -1 \ \rightarrow\ \sqrt{\lambda_1} = \sqrt{2}i,\ \sqrt{\lambda_2} = i$$

固有ベクトルを求める.

$$\begin{bmatrix} 1+2 & -2 \\ 3 & -4+2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{bmatrix} \quad \therefore x_1 = \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1+1 & -2 \\ 3 & -4+1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 3 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \end{bmatrix} \quad \therefore x_2 = \begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

一般解は次のように表される.

$$u(t) = (c_1 e^{\sqrt{2}it} + d_1 e^{-\sqrt{2}it})\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} + (c_2 e^{it} + d_2 e^{-it})\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

初期値の条件より,

$$u(0) = (c_1+d_1)\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} + (c_2+d_2)\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2(c_1+d_1)+(c_2+d_2) \\ 3(c_1+d_1)+(c_2+d_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \cdots (1)$$

$$\frac{du(0)}{dt} = i\sqrt{2}(c_1-d_1)\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} + i(c_2-d_2)\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = i\begin{bmatrix} 2\sqrt{2}(c_1-d_1)+(c_2-d_2) \\ 3\sqrt{2}(c_1-d_1)+(c_2-d_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \cdots (2)$$

(2)より,

$c_1 = d_1$, $c_2 = d_2$ を得る. これを(1)に代入する.

$$\begin{cases} 4c_1 + 2c_2 = 1 \\ 6c_1 + 2c_2 = 0 \end{cases} \quad \text{これより,} \quad c_1 = d_1 = -\frac{1}{2},\ c_2 = d_2 = \frac{3}{2}$$

$$u(t) = -\frac{1}{2}(e^{\sqrt{2}it} + e^{-\sqrt{2}it})\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} + \frac{3}{2}(e^{it} + e^{-it})\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= -\cos\sqrt{2}t\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} + 3\cos t\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad /\!/$$

安定性: 2階の微分方程式の場合は $\mathrm{Re}[\sqrt{\lambda_i}]$ の正負で判定される.

$$\mathrm{Re}[\sqrt{\lambda_1}] = \mathrm{Re}[\sqrt{2}i] = 0$$

$$\mathrm{Re}[\sqrt{\lambda_2}] = \mathrm{Re}[i] = 0$$

であるから, 臨界安定である. //

3.(a) 固有値を求める.

$$\begin{vmatrix} 5-\lambda & 4 \\ 4 & 5-\lambda \end{vmatrix} = (5-\lambda)^2 - 16 = \lambda^2 - 10\lambda + 9 = (\lambda-9)(\lambda-1) = 0$$

$$\lambda_1 = 9,\ \lambda_2 = 1$$

固有ベクトルを求める.　　正規化

$$\begin{bmatrix} 5-9 & 4 \\ 4 & 5-9 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 4 \\ 4 & -4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{より } x_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 5-1 & 4 \\ 4 & 5-1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{より } x_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

スペクトル定理より.

$$A = \lambda_1 x_1 x_1^T + \lambda_2 x_2 x_2^T \quad \cdots\cdots (1)$$

$$= 9\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} + 1\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{9}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad /\!/ \quad \rightarrow \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \text{に等しくなることも確かめられる.}$$

(b) $\lambda_1 > \lambda_2$ であるから, (1)の第1項を用いて表わす.

$$A = \begin{bmatrix} 4.5 & 4.5 \\ 4.5 & 4.5 \end{bmatrix} \;/\!/ \quad \cdots \text{元の} \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \text{に近いことが確められる.}$$

4. (a)

$$\det(A-\lambda I) = \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} \quad \cdots (1)$$

$$\det(A-\lambda I) = (\lambda_1-\lambda)(\lambda_2-\lambda)\cdots(\lambda_n-\lambda) \quad \cdots (2)$$

(1), (2)において $(-\lambda)^{n-1}$ の係数に着目する. (1)において余因子展開を考える. 第1行において, a_{1i}, $i \neq 1$ について展開すると $(a_{11}-\lambda)$ と $(a_{ii}-\lambda)$ が除かれるため最高次数は $n-2$ 次となり $(-\lambda)^{n-1}$ を含まない. 行列式は要素の積の和であるが $(-\lambda)^{n-1}$ を含む要素の積は

$$(a_{11}-\lambda)(a_{22}-\lambda)\cdots(a_{nn}-\lambda) \quad \cdots (3)$$

となる. この式で $(-\lambda)^{n-1}$ の係数は

$$a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn} \quad \cdots (4)$$

である. 一方, (2)における $(-\lambda)^{n-1}$ の係数は

$$\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n \quad \cdots (5)$$

である. (1)と(2)は同じであるから (4), (5)より,

$$\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n = a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn} \;/\!/$$

(b) (2)は λ の恒等式であるから, $\lambda=0$ とおく.

$$\det A = \lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n \;/\!/$$

を得る.

5. (a)

$$\begin{cases} A x_1 = \lambda_1 x_1 & \cdots (\mathrm{i}) \\ A x_2 = \lambda_2 x_2 & \cdots (\mathrm{ii}) \end{cases}$$

$c_1 x_1 + c_2 x_2 = 0$ を満す c_1, c_2 を求める. $\cdots (1)$

(1)に左から A を掛ける.

$$c_1 A x_1 + c_2 A x_2 = c_1\lambda_1 x_1 + c_2\lambda_2 x_2 = 0 \quad \cdots (2)$$

(1)に λ_2 を掛ける.

$$c_1\lambda_2 x_1 + c_2\lambda_2 x_2 = 0 \quad \cdots (3)$$

(2)−(3) を求める.

$$c_1(\lambda_1-\lambda_2)x_1 = 0$$

これより, $\lambda_1 \neq \lambda_2$, $x_1 \neq 0$ であるから, $c_1 = 0$

これを (1) に代入して $c_2 = 0$ を得る.

すなわち, (1)を満す c_1, c_2 は零のみであり, x_1, x_2 は線形独立となる. //

(b) (i)を転置して右から x_2 を掛ける.

$$x_1^T A x_2 = \lambda_1 x_1^T x_2 \quad \cdots (4) \quad \leftarrow A^T = A \text{ を利用}$$

(ii)に左から x_1^T を掛ける.

$$x_1^T A x_2 = \lambda_2 x_1^T x_2 \quad \cdots (5)$$

(4)−(5) を求める.

$$(\lambda_1-\lambda_2)x_1^T x_2 = 0$$

$\lambda_1 \neq \lambda_2$ であるから $x_1^T x_2 = 0$ … 直交する. //

＊ 転置(T)の代わりにエルミット転置(H)でもよい.

6.

$$e^{At} = S e^{\Lambda t} S^{-1} \quad \cdots (1)$$

$$e^{\Lambda t} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & & \\ & e^{\lambda_2 t} & \\ & & \ddots \\ & & & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix} \quad \cdots (2)$$

を利用して計算する. まず, 固有値を計算する.

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 \\ 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)^2 - 1 = \lambda^2 - 6\lambda + 8 = (\lambda-4)(\lambda-2) = 0$$

$$\lambda_1 = 4, \quad \lambda_2 = 2$$

固有ベクトルを計算する.

$$\begin{bmatrix} 3-4 & 1 \\ 1 & 3-4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{bmatrix} \quad \therefore x_1 = \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3-2 & 1 \\ 1 & 3-2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \end{bmatrix} \quad \therefore x_2 = \begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

(1), (2)に代入する.

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad S^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$e^{At} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e^{4t} & 0 \\ 0 & e^{2t} \end{bmatrix}\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} e^{4t} & e^{2t} \\ e^{4t} & -e^{2t} \end{bmatrix}\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} e^{4t}+e^{2t}, & e^{4t}-e^{2t} \\ e^{4t}-e^{2t}, & e^{4t}+e^{2t} \end{bmatrix} \;/\!/$$

7. 一般に行列 A は次のように分解できる.

$$A = LDU \quad \text{---} (1)$$

(1)を転置する.

$$A^T = U^T D^T L^T \quad \text{---} (2)$$

$A^T = A$, $D^T = D$ であるから, (1), (2)より

$$LDU = U^T D L^T$$

LDU 分解は唯一である(分~~解~~の仕方は一通りである)から,

$$U = L^T \quad \text{---} (3)$$

となる. (3)を(1)に代入して2次形式を求める.

$$x^T A x = x^T L D L^T x \quad \text{---} (4)$$

ここで, $y = L^T x$ とおく. (4)は次のように変形できる.

$$x^T A x = y^T D y = d_1 y_1^2 + d_2 y_2^2 + \cdots + d_n y_n^2$$

ピボット d_k が正であれば, $y_k^2 > 0$ であるから $x^T A x > 0$ となる. /\!/