

## 線形代数学第2 - 期末試験問題 -

情報システム工学科1年生

平成19年度後期 - 2008.2.6 -

1. 2次元ベクトル  $\boldsymbol{x}(n) = [x_1(n), x_2(n)]^T$  が次式により更新される。

$$\boldsymbol{x}(n+1) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(n), \quad \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

- (a)  $\boldsymbol{x}(3)$  を求めよ。  
(b)  $n \rightarrow \infty$  としたとき,  $\boldsymbol{x}(n)$  はどうなるか。
2. 行列  $\boldsymbol{A}$  を掛けることにより, 任意のベクトル  $\boldsymbol{a}$  を  $\boldsymbol{x}_1 = [1, 1]^T$  方向に1倍,  $\boldsymbol{x}_2 = [1, -1]^T$  方向に2倍するような行列  $\boldsymbol{A}$  を求めよ (ヒント)  $\boldsymbol{a}$  から  $\boldsymbol{x}_1$  上への射影,  $\boldsymbol{x}_2$  上への射影を考える.  $\boldsymbol{A}\boldsymbol{a}$  をスペクトル定理に基づいて表現. 但し, 固有ベクトルは正規化.
3. 固有値, 固有ベクトルに関して, 以下の性質を証明せよ.  
(a) 対称行列  $\boldsymbol{A}$  において, 固有値が異なるならば, 固有ベクトルは直交する.  
(b)  $\boldsymbol{A}$  の固有値が  $\lambda$  で, 固有ベクトルが  $\boldsymbol{x}$  であるとき,  $\boldsymbol{A}^k$  の固有値は  $\lambda^k$  で固有ベクトルは  $\boldsymbol{x}$  である.  
(c) 行列  $\boldsymbol{A}$  と  $\boldsymbol{A}^T$  は同じ固有値を持つ.  
(参考)  $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{S}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{S}^{-1}$ .  $(\boldsymbol{S}^{-1})^T = (\boldsymbol{S}^T)^{-1}$ .
4. 行列  $\boldsymbol{A}$  と  $\boldsymbol{B}$  が同じ固有ベクトルを持ち, 固有ベクトルを列ベクトルとする行列  $\boldsymbol{S}$  によって,  $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{S}\boldsymbol{\Lambda}_1\boldsymbol{S}^{-1}$ ,  $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{S}\boldsymbol{\Lambda}_2\boldsymbol{S}^{-1}$  と表されるとき,  $\boldsymbol{A}\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{A}$  となることを証明せよ. また, 次の  $\boldsymbol{A}$  に対する  $\boldsymbol{B}$  の例を求めよ. 但し,  $\boldsymbol{B}$  の固有値は適当に与えるものとする.

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

5. 次の微分方程式を解け. また, この微分方程式の解は安定であるか, 不安定であるか示せ.

$$\frac{d^2\boldsymbol{u}(t)}{dt^2} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \boldsymbol{u}(t), \quad \boldsymbol{u}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \frac{d\boldsymbol{u}(0)}{dt} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

6. 複素ベクトル  $\boldsymbol{x} = [1+i, 1]^T$  と  $\boldsymbol{y} = [1, 1-i]^T$  について  
(a) 各々の長さ (ノルム) を求めよ ( $\sqrt{\text{数値}}$  の形でよい).  
(b)  $\boldsymbol{x}$  と  $\boldsymbol{y}$  の内積を求めよ.