平成２０年度後期
電子情報学類１年生（１組）

線形代数学第２　期末試験<解答例> 2009.2.4

1. $\boldsymbol{A}$ を 2×2 の実対称行列とする．ベクトル $\boldsymbol{x}=[1,1]^T$ に $\boldsymbol{A}$ をかけると $[3,3]^T$ になった．また，$\boldsymbol{A}$ の行列式は 3 である．$\boldsymbol{A}$ を求めよ.（ヒント：実対称行列において，異なる固有値に対する固有ベクトルは直交する．$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{S\Lambda S}^{-1}$）
<解答例>
題意より $\boldsymbol{Ax}=3\boldsymbol{x}$ が成り立っており，3 と $\boldsymbol{x}$ が $\boldsymbol{A}$ の固有値，固有ベクトルである．行列式は固有値の積であるから，もう一つの固有値を λ とすると，$det\boldsymbol{A}=3\lambda=3$ より，$\lambda=1$ となる．対称行列で固有値が異なる場合は固有ベクトルは直交するので，$\lambda=1$ に対する固有ベクトルは $\boldsymbol{x}=[1,1]^T$ に直交する．一つの解として，$[1,-1]^T$ を用いる．固有値，固有ベクトルが求まれば，$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{S\Lambda S}^{-1}$ より $\boldsymbol{A}$ が求まる．

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{S} &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} && (1)\\
\boldsymbol{S}^{-1} &= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} && (2)\\
\boldsymbol{\Lambda} &= \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} && (3)\\
\boldsymbol{A} &= \boldsymbol{S\Lambda S}^{-1} && (4)\\
&= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} && (5)\\
&= \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} && (6)
\end{aligned}$$

2. ２次元ベクトル $\boldsymbol{x}(n)=[x_1(n),x_2(n)]^T$ が次式により更新される。

$$\boldsymbol{x}(n+1)=\boldsymbol{Ax}(n),\qquad \boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}\qquad \boldsymbol{x}(0)=\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

(a) $\boldsymbol{A}$ の固有値，固有ベクトルを求めよ．

(b) $\boldsymbol{x}(n)$ を求めよ。

(c) $n \to \infty$ としたとき，$\boldsymbol{x}(n)$ はどうなるか。

＜解答例＞

(a)

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 \\ -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 4\lambda + 3 = (\lambda-3)(\lambda-1) = 0 \tag{7}$$

より，固有値は $\lambda_1 = 3, \lambda_2 = 1$ となる．固有ベクトルは

$$\begin{align} \begin{bmatrix} 2-3 & -1 \\ -1 & 2-3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{12} \end{bmatrix} &= \mathbf{0} \tag{8} \\ \begin{bmatrix} 2-1 & -1 \\ -1 & 2-1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{21} \\ x_{22} \end{bmatrix} &= \mathbf{0} \tag{9} \end{align}$$

より，$\boldsymbol{x}_1 = [x_{11}, x_{12}]^T = [1, -1]^T$，$\boldsymbol{x}_2 = [x_{21}, x_{22}]^T = [1, 1]^T$ となる．

(b)

$$\begin{align} \boldsymbol{x}(n) &= \boldsymbol{A}^n \boldsymbol{x}(0) \tag{10} \\ \boldsymbol{A} &= \boldsymbol{S}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{S}^{-1} \tag{11} \\ \boldsymbol{x}(n) &= \boldsymbol{S}\boldsymbol{\Lambda}^n\boldsymbol{S}^{-1}\boldsymbol{x}(0) \tag{12} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3^n & 0 \\ 0 & 1^n \end{bmatrix} \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{13} \\ &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 3^n + 1^n \\ -3^n + 1^n \end{bmatrix} \tag{14} \end{align}$$

(c) $n \to \infty$ に対して，$\boldsymbol{x}(n) \to [+\infty, -\infty]$ になる．

3. 次の微分方程式を解け．また，この微分方程式の解は安定であるか，不安定であるか示せ．

$$\frac{d\boldsymbol{u}(t)}{dt} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \boldsymbol{u}(t), \qquad \boldsymbol{u}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

＜解答例＞

行列の固有値，固有ベクトルを求める．

$$\begin{vmatrix} -2-\lambda & 1 \\ 1 & -2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 4\lambda + 3 = (\lambda+3)(\lambda+1) = 0 \tag{15}$$

より，固有値は $\lambda_1 = -3, \lambda_2 = -1$ となる．固有ベクトルは

$$\begin{bmatrix} -2+3 & 1 \\ 1 & -2+3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{12} \end{bmatrix} = \mathbf{0} \tag{16}$$

$$\begin{bmatrix} -2+1 & 1 \\ 1 & -2+1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{21} \\ x_{22} \end{bmatrix} = \mathbf{0} \tag{17}$$

より，$\boldsymbol{x}_1 = [x_{11}, x_{12}]^T = [1, -1]^T$，$\boldsymbol{x}_2 = [x_{21}, x_{22}]^T = [1, 1]^T$ となる．

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u}(t) &= \boldsymbol{S} e^{\boldsymbol{\Lambda} t} \boldsymbol{S}^{-1} \boldsymbol{u}(0) && (18) \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-3t} & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{bmatrix} \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} && (19) \\ &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} e^{-3t} + e^{-t} \\ -e^{-3t} + e^{-t} \end{bmatrix} && (20) \end{aligned}$$

固有値が全て負であるから，この微分方程式の解は**安定**である．すなわち，$t \to \infty$ に対して $\boldsymbol{u}(t) \to \mathbf{0}$ である．

4. 次の行列に関して，以下の問に答えよ．

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

(a) $\boldsymbol{A}$ をスペクトル定理で分解せよ．

(b) $\boldsymbol{A}$ を固有値の大きい成分のみを用いて表せ．

<解答例>

(a) 固有値と固有ベクトルを求める．

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 \\ 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 6\lambda + 5 = (\lambda-5)(\lambda-1) = 0 \tag{21}$$

より，固有値は $\lambda_1 = 5, \lambda_2 = 1$ となる．固有ベクトルは

$$\begin{bmatrix} 3-5 & 2 \\ 2 & 3-5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{12} \end{bmatrix} = \mathbf{0} \tag{22}$$

$$\begin{bmatrix} 3-1 & 2 \\ 2 & 3-1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{21} \\ x_{22} \end{bmatrix} = \mathbf{0} \tag{23}$$

より，$\boldsymbol{x}_1 = [x_{11}, x_{12}]^T = [1, 1]^T$，$\boldsymbol{x}_2 = [x_{21}, x_{22}]^T = [1, -1]^T$ となる．さらに，正規化して，$\boldsymbol{x}_1 = (1/\sqrt{2})[1, 1]^T$，$\boldsymbol{x}_2 = (1/\sqrt{2})[1, -1]^T$ とすると，固有ベクトルを列ベクトルとする行列 $\boldsymbol{S}$ は直交行列となり，$\boldsymbol{S}^{-1} = \boldsymbol{S}^T$ となる．これより，

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{S}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{S}^{-1} = \boldsymbol{S}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{S}^T \tag{24}$$

$$= \lambda_1 \boldsymbol{x}_1 \boldsymbol{x}_1^T + \lambda_2 \boldsymbol{x}_2 \boldsymbol{x}_2^T \tag{25}$$

となる．これがスペクトル定理である．上式に固有値と固有ベクトルを代入する．

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A} &= 5 \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \\ &+ 1 \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{26}$$

$$= \frac{5}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \tag{27}$$

(b) 大きい固有値である $\lambda_1 = 5$ の成分のみを用いて $\boldsymbol{A}$ を表す．

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2.5 & 2.5 \\ 2.5 & 2.5 \end{bmatrix} \tag{28}$$

この結果は元の行列に近い値となっている．

5.　複素ベクトル $\boldsymbol{x} = [1+i, i]^T$ と $\boldsymbol{y} = [1-i, -i]^T$ について

(a)　各々の長さ（ノルム）を求めよ（$\sqrt{\text{数値}}$ の形でよい）．

(b)　$\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ の内積を求めよ．

＜解答例＞

(a)

$$\begin{aligned} \| \boldsymbol{x} \|^2 &= |1+i|^2 + |i|^2 = 3 \quad (29) \\ \| \boldsymbol{y} \|^2 &= |1-i|^2 + |-i|^2 = 3 \quad (30) \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x}^H \boldsymbol{y} &= \left[\begin{array}{cc} 1-i, & -i \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} 1-i \\ -i \end{array} \right] \\ &= (1-i)^2 + (-i)^2 = -1-2i \quad (31) \end{aligned}$$

6. 実対称行列 $\boldsymbol{A}$ が正定値であるための必要十分条件は次のように表される．

（1）$\boldsymbol{0}$ でない全てのベクトル $\boldsymbol{x}$ に対して $\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} > 0$ である．

（2）$\boldsymbol{A}$ の全ての固有値が正である：$\lambda_i > 0$.

（3）部分行列 $\boldsymbol{A}_k$ の行列式が全て正である：$\det \boldsymbol{A}_k > 0$.

（4）$\boldsymbol{A}$ の全てのピボットが正である:$d_k > 0$. 但し，行の交換はないものとする．

（5）$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{W}^T\boldsymbol{W}$ となる正則行列 $\boldsymbol{W}$ が存在する．

以下の問に答えよ．

(a) （1）から（2）を証明せよ．

(b) （1）,（2）から（3）を証明せよ．

(c) （3）から（4）を証明せよ．

(d) （2）と $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{S}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{S}^{-1}$ から（5）を証明せよ．(ヒント：$\boldsymbol{A}$ が実対称行列であり，固有ベクトルは正規直交系をなすため $\boldsymbol{S}^{-1} = \boldsymbol{S}^T$ が成り立つ)

＜解答例＞

(a) 固有値，固有ベクトルの関係を用いる．

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_i = \lambda_i \boldsymbol{x}_i \quad (32)$$

左から $\boldsymbol{x}_i^T$ をかけて，λ_i について解く．

$$\boldsymbol{x}_i^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_i = \boldsymbol{x}_i^T\lambda_i\boldsymbol{x}_i \quad (33)$$

$$\lambda_i = \frac{\boldsymbol{x}_i^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_i}{\boldsymbol{x}_i^T\boldsymbol{x}_i} \quad (34)$$

分子は条件より正であり，分母はベクトルのノルム 2 乗であるから正である．従って，$\lambda_i > 0$ となる．

(b) （1）は任意のベクトルに対して成り立つから $\boldsymbol{x}$ として始めの k 個の成分からなる部分ベクトルを $\boldsymbol{x}_k$ とし，残りの $n-k$ 個の成分は零とする．

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x} &= \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_k \\ \boldsymbol{0} \end{bmatrix} \quad (35)\\ \boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} &= \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_k^T & \boldsymbol{0} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \boldsymbol{A}_k & * \\ * & * \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_k \\ \boldsymbol{0} \end{bmatrix} = \boldsymbol{x}_k^T\boldsymbol{A}_k\boldsymbol{x}_k > 0 \quad (36)\end{aligned}$$

最後の式と条件（2）より，$\boldsymbol{A}_k$ の固有値は全て正となる．一方,「行列式＝固有値の積」であるから，$\boldsymbol{A}_k$ の行列式＞０となる．

(c) k 番目のピボットを d_k とするとき，

$$d_k = \frac{\det \boldsymbol{A}_k}{\det \boldsymbol{A}_{k-1}} \quad (37)$$

（3）より $\boldsymbol{A}_k$ の行列式が正であるから，ピボットも正になる．ピボットは上式で順番に求められるが，正定値行列では，全ての $\boldsymbol{A}_k$ の行列式が正であるから，行列 $\boldsymbol{A}$ の左上から出現するピボットは常に正であり（零ではなく），行の交換を必要としない．

(d) 固有値，固有ベクトルの関係

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_i = \lambda_i\boldsymbol{x}_i \quad (38)$$

を $i = 1, 2, \cdots, n$ について行列で表現する．

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{S} = \boldsymbol{S}\boldsymbol{\Lambda} \quad (39)$$

$\boldsymbol{A}$ は実対称行列であり，その固有ベクトルは正規直交系を成す．従って，固有ベクトルを列ベクトルとする $\boldsymbol{S}$ の逆行列は $\boldsymbol{S}^T$ である．これより，上式は次のように分解できる．

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A} &= \boldsymbol{S}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{S}^T = (\sqrt{\boldsymbol{\Lambda}}\boldsymbol{S}^T)^T(\sqrt{\boldsymbol{\Lambda}}\boldsymbol{S}^T) \quad (40)\\ \boldsymbol{W} &= \sqrt{\boldsymbol{\Lambda}}\boldsymbol{S}^T \quad (41)\end{aligned}$$

$\sqrt{\boldsymbol{\Lambda}}$ は $\sqrt{\lambda_i}$ を対角要素とする対角行列である．ここで,（2）の「固有値は正である」という条件を用いている．