線形代数学第２

平成20年度後期　中間試験　問題＆解答例

電子情報学類１年生（１組）　　2008.12.10

1. 曲線 $y = C + D\sin(t)$ で３点 $(t, y) = (-\pi/2, -1), (0, 1), (\pi/2, 2)$ を近似するとき，誤差の二乗和を最小にするように C, D を求めよ．y，C，D，t はスカラーである．

   ＜解答例＞

   曲線 $y = C + D\sin(t)$ に $(t, y) = (-\pi/2, -1), (0, 1), (\pi/2, 2)$ を代入して、次の連立方程式を得る．

$$\begin{aligned} -1 &= C - D \\ 1 &= C + 0 \\ 2 &= C + D \end{aligned} \tag{1}$$

   これを行列の形で表す．

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C \\ D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \tag{2}$$

   この方程式を $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ として，最小２乗解 $\bar{x} = (\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{b}$ を求める．

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} C \\ D \end{bmatrix} \tag{3}$$

$$= \left(\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2/3 \\ 3/2 \end{bmatrix} \tag{4}$$

   これより，

$$C = \frac{2}{3} \qquad D = \frac{3}{2} \tag{5}$$

2.　次の問に答えよ．

(a) 3 次元空間における平面 $x-y+z=0$ の基底を求めよ．

＜解答例＞

基底とは「空間を張る線形独立なベクトル」である．平面を張るベクトルは $\boldsymbol{v}=[x,y,z]^T$ と表される．$x-y+z=0$ において，自由に決められるのは 2 変数である．線形独立なベクトルを求めるために，$(x,y)=(1,0)$ 及び $(x,y)=(0,1)$ とする．その結果，$z=-1,1$ となる．以上より，平面を張る線形独立なベクトル，すなわち基底は次のようになる．

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{6}$$

(b) 平面 $x-y+z=0$ を列空間とする行列 $\boldsymbol{A}$ を求めよ．

＜解答例＞

$\boldsymbol{A}$ は平面 $x-y+z=0$ の基底を列ベクトルとする行列である．上の結果より，

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \tag{7}$$

(c) 平面 $x-y+z=0$ 上で，座標点 $(1,-1,1)$ への距離が最小となる点の座標を求めよ．

＜解答例＞

ベクトル $\boldsymbol{b}=[1,-1,1]^T$ から行列 $\boldsymbol{A}$ への射影 $\boldsymbol{p}$ が求める解である．

$$\begin{aligned} \boldsymbol{p} &= \boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}^T(\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{b} \qquad (8) \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \right)^{-1} \\ &\times \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (9) \end{aligned}$$

3. 以下の問に答えよ．

(a) 線形独立なベクトル $\boldsymbol{a}_1=[1,1,0]^T, \boldsymbol{a}_2=[1,0,1]^T, \boldsymbol{a}_3=[0,1,1]^T$ を互いに直交するベクトル $\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\boldsymbol{v}_3$ に変換せよ．

＜解答例＞

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}_1 &= \boldsymbol{a}_1 & (10)\\ \boldsymbol{v}_2 &= \boldsymbol{a}_2 - \frac{\boldsymbol{v_1}^T \boldsymbol{a}_2}{\boldsymbol{v}_1^T \boldsymbol{v}_1}\boldsymbol{v}_1 & (11)\\ \boldsymbol{v}_3 &= \boldsymbol{a}_3 - \frac{\boldsymbol{v_1}^T \boldsymbol{a}_3}{\boldsymbol{v}_1^T \boldsymbol{v}_1}\boldsymbol{v}_1 - \frac{\boldsymbol{v_2}^T \boldsymbol{a}_3}{\boldsymbol{v}_2^T \boldsymbol{v}_2}\boldsymbol{v}_2 & (12) \end{aligned}$$

より，$\boldsymbol{v}_1$，$\boldsymbol{v}_2$，$\boldsymbol{v}_3$ が次のように求まる．

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{v}_2 = \begin{bmatrix} 1/2 \\ -1/2 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{v}_3 = \begin{bmatrix} -2/3 \\ 2/3 \\ 2/3 \end{bmatrix} \tag{13}$$

(b) $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ の長さを 1 に正規化することにより，$\boldsymbol{q}_1, \boldsymbol{q}_2, \boldsymbol{q}_3$ を求めよ．

＜解答例＞

$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ の長さを求めて，各々のベクトルを割り算する．

$$\begin{aligned} \| \boldsymbol{v}_1 \| &= \sqrt{1+1} = \sqrt{2} & (14)\\ \| \boldsymbol{v}_2 \| &= \sqrt{1/4+1/4+1} = \sqrt{3/2} & (15)\\ \| \boldsymbol{v}_3 \| &= \sqrt{4/9+4/9+4/9} = 2/\sqrt{3} & (16) \end{aligned}$$

$\boldsymbol{q}_i = \boldsymbol{v}_i / \| \boldsymbol{v}_i \|$ より

$$\begin{aligned} \boldsymbol{q}_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}}\boldsymbol{v}_1 = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix} & (17)\\ \boldsymbol{q}_2 &= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\boldsymbol{v}_2 = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{6} \\ \sqrt{2}/\sqrt{3} \end{bmatrix} & (18)\\ \boldsymbol{q}_3 &= \frac{\sqrt{3}}{2}\boldsymbol{v}_3 = \begin{bmatrix} -1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{bmatrix} & (19) \end{aligned}$$

(c) $\boldsymbol{q}_1, \boldsymbol{q}_2, \boldsymbol{q}_3$ を列ベクトルとする行列 $\boldsymbol{Q}$ を求め，ベクトル $\boldsymbol{u} = [1, -1, 1]^T$ に対して，$\| \boldsymbol{Q}\boldsymbol{u} \| = \|\boldsymbol{u}\|$ となることを示せ．

＜解答例＞

(d) $\boldsymbol{q}_1, \boldsymbol{q}_2, \boldsymbol{q}_3$ を列ベクトルとする行列 $\boldsymbol{Q}$ は次のようになる．

$$\boldsymbol{Q} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 0 & \sqrt{2}/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \end{bmatrix} \tag{20}$$

次に，$\boldsymbol{u}$ と $\boldsymbol{Qu}$ の長さ（ノルム）を計算する．

$$\| \boldsymbol{u} \| = \sqrt{1+1+1} = \sqrt{3} \tag{21}$$

$$\boldsymbol{Qu} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} - 1/\sqrt{6} - 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{2} + 1/\sqrt{6} + 1/\sqrt{3} \\ -\sqrt{2}/\sqrt{3} + 1/\sqrt{3} \end{bmatrix} \tag{22}$$

$$\| \boldsymbol{Qu} \| = \sqrt{3} \tag{23}$$

以上より，$\| \boldsymbol{Qu} \| = \| \boldsymbol{u} \|$ となる．

4. 次の行列の擬似逆行列を求めよ．

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

<解答例>

$\boldsymbol{A}$ は縦長行列であり，列ベクトルが線形独立であるから，左擬似逆行列が存在する．

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A}^+ &= (\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{A}^T \\ &= \left(\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{14} \begin{bmatrix} 5 & -4 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 6 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{24}$$

$\boldsymbol{B}$ は横長行列であり，行ベクトルが線形独立であるから，右擬似逆行列が

存在する．

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{B}^{+} &= \boldsymbol{B}^T(\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}^T)^{-1} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \right)^{-1} \\
&= \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \\ -3 & -2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \qquad (25)
\end{aligned}
$$

5. 行列式は全ての行及び全て列から１個の要素を選び，それらの積の和で構成される．要素の選び方により，積には負号が付けられる．このことに基づいて，以下の性質を証明せよ．

(a) 行列式は一つの行に関して線形関数である．

＜解答例＞

第 i 行，第 j 列の要素を a_{ij} とすると，行列式は一般に次のように表される．

$$\det \boldsymbol{A} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\alpha_{ij} \qquad (26)$$

α_{ij} には a_{ij} は含まれない．a_{ij} を $ca_{ij} + db_{ij}$ としたときの行列を $\boldsymbol{A'}$ とする．$\boldsymbol{A'}$ の行列式は上式の a_{ij} に $ca_{ij} + db_{ij}$ を代入して求まる．

$$
\begin{aligned}
\det \boldsymbol{A'} &= \sum_{j=1}^{n}(ca_{ij} + db_{ij})\alpha_{ij} && (27) \\
&= c\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\alpha_{ij} + d\sum_{j=1}^{n} b_{ij}\alpha_{ij} && (28) \\
&= c\det \boldsymbol{A} + d\det \boldsymbol{B} && (29)
\end{aligned}
$$

$\boldsymbol{B}$ は $\boldsymbol{A}$ の第 i 行を b_{ij} に替えた行列である．上式より，行列式において，一つの行に関して線形性が成り立つことが示された．

(b) ある行が零である行列の行列式は零である．

＜解答例＞
式 (26) において，$a_{ij}=0$ とすると，$\det \boldsymbol{A}=0$ となることが分かる．

(c) 単位行列の行列式は 1 である．
＜解答例＞
式 (26) を次のように変形する．

$$\det \boldsymbol{A} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn} + \sum_{j=1,\neq i}^{n} a_{ij}\alpha_{ij} \tag{30}$$

右辺第 1 項は対角要素のみで構成される積であり，第 2 項は非対角要素を含む積で構成される．$\boldsymbol{A}$ が対角行列であるから，右辺第 1 項は 1 となり，右辺第 2 項は零になる．以上より，対角行列の行列式は 1 となる．

6. 次の行列式を求めよ．行列の性質 1〜10，または行列式の適当な公式を用いて計算する．

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & 3 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 3 & 0 \\ 2 & -3 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 0 \\ -3 & -2 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & -3 & 1 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{D} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 5 & 7 & 1 \\ -1 & -2 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

＜解答例＞
$\boldsymbol{A}$ については，ガウスの前進消去を行う．

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & 3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \tag{31}$$

第 3 行が零になるので，

$$\det \boldsymbol{A} = 0 \tag{32}$$

となる．

$\boldsymbol{B}$ は下三角行列なので，行列式は対角要素の積である．

$$\det \boldsymbol{B} = 2 \times (-1) \times 3 \times (-1) = 6 \tag{33}$$

$\boldsymbol{C}$ は余因子展開を用いる．

$$\begin{aligned}
\det \boldsymbol{C} &= \begin{vmatrix} 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 0 \\ -3 & -2 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & -3 & 1 \end{vmatrix} && (34) \\
&= (-2) \times (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -3 & 2 & -1 \\ 1 & -3 & 1 \end{vmatrix} && (35) \\
&= 2 \times (-1) \times (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} -3 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \times (-3+1) = 4 && (36)
\end{aligned}$$

$\boldsymbol{D}$ は第 2 行が零であるから，

$$\det \boldsymbol{D} = 0 \tag{37}$$

である．

7. 次の連立方程式の解をクラメルの公式により求めよ．

$$\begin{aligned}
u - v + w &= 1 \\
u + 2v - w &= 2 \\
2u + v - w &= -1
\end{aligned}$$

＜解答例＞
方程式は行列，ベクトルを用いて次のように表される．

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} \tag{38}$$

クラメルの公式より,

$$u = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{0}{-3} = 0 \tag{39}$$

$$v = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -9 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{-9}{-3} = 3 \tag{40}$$

$$w = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{-12}{-3} = 4 \tag{41}$$

8. 次の行列 $\boldsymbol{A}$ の逆行列を $adj\boldsymbol{A}/det\boldsymbol{A}$ により求めよ.

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

＜解答例＞

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \frac{adj\boldsymbol{A}}{\det \boldsymbol{A}} = \frac{\begin{bmatrix} \boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{A}_{21} \\ \boldsymbol{A}_{12} & \boldsymbol{A}_{22} \end{bmatrix}}{\det \boldsymbol{A}} \tag{42}$$

$adj\boldsymbol{A}$ を計算する.

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}_{11} &= (-1)^{1+1}d = d && (43)\\ \boldsymbol{A}_{12} &= (-1)^{1+2}c = -c && (44)\\ \boldsymbol{A}_{21} &= (-1)^{2+1}b = -b && (45)\\ \boldsymbol{A}_{22} &= (-1)^{2+2}a = a && (46)\end{aligned}$$

さらに,

$$\det\boldsymbol{A} = ad - bc \tag{47}$$

であるから,

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \frac{adj\boldsymbol{A}}{\det\boldsymbol{A}} = \frac{\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}}{ad - bc} \tag{48}$$