(平成21年度前期) 線形代数学第1 中間試験〈解答例〉

2009.6.3

1. (a) 計算不可

(b) $\begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & -12 & 3 \\ -4 & 8 & -2 \\ 2 & -4 & 1 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 4 & -2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ -2 & 3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3-6, & -1 \\ 4-6, & -2+9 \\ -1-3, & 3+12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & -1 \\ -2 & 7 \\ -4 & 15 \end{bmatrix}$

(d) $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 7 & 1 \\ 5 & -5 & 4 \\ -1 & 8 & 9 \end{bmatrix}$

(e) $\begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3+4-1, & 9+2+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 13 \end{bmatrix}$

(f) $\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+6 \\ -1-2 \\ 4+10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ -3 \\ 14 \end{bmatrix}$

2.

(a) $\mathbb{E}_{21} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbb{E}_{31} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -b & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbb{E}_{32} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -c & 1 \end{bmatrix}$

(b) $\mathbb{E}_{21}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbb{E}_{31}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ b & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbb{E}_{32}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & c & 1 \end{bmatrix}$

(c)

$$\mathbb{L} = \mathbb{E}_{21}^{-1}\mathbb{E}_{31}^{-1}\mathbb{E}_{32}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ b & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & c & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ b & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & c & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ b & c & 1 \end{bmatrix}$$

3.

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\to \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$w = 0$

$-v + w = -1 \quad \therefore v = 1$

$u - 2v + w = -1 \quad \therefore u = 1$

$\mathbb{P}$ は第2行と第3行を交換する行列

$$\mathbb{P} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

4.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 7/3 \end{bmatrix} = \mathbb{U}'$$ とする.

第1行の2倍を第2行から引く
第1行の1倍を第3行から引く
第2行の2/3倍を第3行から引く

$$\to \mathbb{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2/3 & 1 \end{bmatrix}$$

さらに,

$$\mathbb{U}' = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 7/3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 7/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbb{D}\mathbb{U}$$

以上より,

$$\mathbb{A} = \mathbb{L}\mathbb{D}\mathbb{U} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2/3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 7/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

5.

$$[\mathbb{A} \mid \mathbb{I}] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\to \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 3/2 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\to \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & -1 & 0 & 3/2 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & -3/2 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & -1/2 & 1/2 & 1/2 \end{array}\right]$$

$$\therefore \quad \mathbb{A}^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -3 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

6. Gauss−Jordan 法によれば, Gauss の前進消去と後退代入により $\mathbb{A}$ を $\mathbb{I}$ に変形できれば $\mathbb{A}$ の逆行列が存在する.

$$\mathbb{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1^T \\ \mathbf{a}_2^T \\ \mathbf{a}_3^T \end{bmatrix}$$

とする.

Gaussの前進消去により

$$\mathbb{U} = \begin{bmatrix} a_1^T \\ d_1 a_1^T + a_2^T \\ e_1 a_1^T + e_2 a_2^T + a_3^T \end{bmatrix}$$

を得る. 条件より

$$c_1 a_1 + c_2 a_2 + c_3 a_3 = 0$$

を満す c_i が零のみであり, かつ, $d_1 \neq 0$, $e_1 \neq 0$, $e_2 \neq 0$ であるから,

$$a_1^T \neq 0$$
$$d_1 a_1^T + a_2^T \neq 0$$
$$e_1 a_1^T + e_2 a_2^T + a_3^T \neq 0$$

となり, $\mathbb{U}$ の全ての行は零にならない. 従って, $\mathbb{U}$ をさらにGaussの後退代入により $\mathbb{I}$ に変形できる.

∴ A は逆行列を持つ.

7. 3×3 の下3角行列の例を

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a_{21} & 1 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & 1 \end{bmatrix}$$

とする.

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a_{21} & 1 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

より

$$\begin{cases} b_{11} = 1, \quad b_{12} = b_{13} = 0 \\ a_{21} b_{11} + b_{21} = 0, \quad b_{22} = 1, \quad b_{23} = 0 \\ a_{31} b_{11} + a_{32} b_{21} + b_{31} = 0, \quad a_{32} b_{22} + b_{32} = 0, \quad b_{33} = 1 \end{cases}$$

さらに, $b_{21} = -a_{21}$, $b_{31} = -a_{31} + a_{32} a_{21}$, $b_{32} = -a_{32}$

以上より, $\mathbb{B}$ は対角要素が 1 の下3角行列である.