線形代数学第２

平成21年度後期　中間試験　問題＆解答例

電子情報学類１年生（１組）　　2009.11.25

1. 曲線 $y = C + D2^t$ で３点 $(t, y) = (0,1), (1,2), (2,3)$ を近似するとき，誤差の二乗和を最小にするように C, D を求めよ．y，C，D，t はスカラーである．

   ＜解答例＞

   曲線 $y = C + D2^t$ に $(t, y) = (0,1), (1,2), (2,3)$ を代入して、次の連立方程式を得る．

$$\begin{aligned} 1 &= C + D \\ 2 &= C + 2D \\ 3 &= C + 4D \end{aligned} \tag{1}$$

   これを行列の形で表す．

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C \\ D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \tag{2}$$

   この方程式を $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ として，最小２乗解 $\bar{x} = (\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{b}$ を求める．

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} C \\ D \end{bmatrix} \tag{3}$$

$$= \left(\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \tag{4}$$

$$= \begin{bmatrix} 1/2 \\ 9/14 \end{bmatrix} \tag{5}$$

   これより，

$$C = \frac{1}{2} \qquad D = \frac{9}{14} \tag{6}$$

2. $\boldsymbol{R}^4$ における部分空間 V のベクトル $\boldsymbol{x} = [x_1, x_2, x_3, x_4]^T$ が次式を満たすとき，以下の問に答えよ．

$$x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0$$
$$x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 0$$

(a) 空間 V の基底を求めよ．

＜解答例＞

基底とは「空間を張る線形独立なベクトル」である．上式の関係より，x_1, x_2, x_3, x_4 の内，2 個の変数は従属となる．すなわち，独立に決められる変数は 2 個である. これは線形独立なベクトルが 2 個であることを意味する．仮に，$x_1 = 1, x_2 = 0$ 及び $x_1 = 0, x_2 = 1$ とすると，上式より，

$$1 + 0 - x_3 + x_4 = 0$$
$$1 - 0 + x_3 + x_4 = 0$$

及び

$$0 + 1 - x_3 + x_4 = 0$$
$$0 - 1 + x_3 + x_4 = 0$$

となり，$x_3 = 0, x_4 = -1$ 及び $x_3 = 1, x_4 = 0$ を得る．以上より，空間 V を張る線形独立なベクトル，すなわち基底は次のようになる．

$$\boldsymbol{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{x}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{7}$$

基底が 2 個のベクトルであるから，この空間 V は 2 次元であり，平面となる．

(b) 空間 V を列空間とする行列 $\boldsymbol{A}$ を求めよ．

＜解答例＞

$\boldsymbol{A}$ は空間 V の基底を列ベクトルとする行列である．上の結果より，

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \tag{8}$$

(c) 空間 V 上で，座標点 $(1,1,1,1)$ への距離が最小となる点の座標を求めよ．
<解答例>
空間 V は行列 $\boldsymbol{A}$ の列空間であるから，ベクトル $\boldsymbol{b} = [1,1,1,1]^T$ から行列 $\boldsymbol{A}$ の列空間への射影 $\boldsymbol{p}$ が求める解である．

$$\begin{aligned} \boldsymbol{p} &= \boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}^T(\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{b} && (9) \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \right)^{-1} \\ &\times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} && (10) \end{aligned}$$

従って，求める座標は $(0,1,1,0)$ となる．

3. 以下の問に答えよ．

(a) 線形独立なベクトル $\boldsymbol{a}_1 = [1,1,-1]^T, \boldsymbol{a}_2 = [1,0,1]^T, \boldsymbol{a}_3 = [0,-1,1]^T$ を互いに直交するベクトル $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ に変換せよ．
<解答例>

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}_1 &= \boldsymbol{a}_1 && (11) \\ \boldsymbol{v}_2 &= \boldsymbol{a}_2 - \frac{\boldsymbol{v_1}^T\boldsymbol{a}_2}{\boldsymbol{v}_1^T\boldsymbol{v}_1}\boldsymbol{v}_1 && (12) \\ \boldsymbol{v}_3 &= \boldsymbol{a}_3 - \frac{\boldsymbol{v_1}^T\boldsymbol{a}_3}{\boldsymbol{v}_1^T\boldsymbol{v}_1}\boldsymbol{v}_1 - \frac{\boldsymbol{v_2}^T\boldsymbol{a}_3}{\boldsymbol{v}_2^T\boldsymbol{v}_2}\boldsymbol{v}_2 && (13) \end{aligned}$$

より，$\boldsymbol{v}_1$，$\boldsymbol{v}_2$，$\boldsymbol{v}_3$ が次のように求まる．

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{v}_3 = \begin{bmatrix} 1/6 \\ -1/3 \\ -1/6 \end{bmatrix} \tag{14}$$

(b) $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ が互いに直交することを確かめよ．

＜解答例＞

これらのベクトルの内積が零になることを確かめる．

$$\boldsymbol{v}_1^T\boldsymbol{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 0 \tag{15}$$

$$\boldsymbol{v}_1^T\boldsymbol{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/6 \\ -1/3 \\ -1/6 \end{bmatrix} = 0 \tag{16}$$

$$\boldsymbol{v}_2^T\boldsymbol{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/6 \\ -1/3 \\ -1/6 \end{bmatrix} = 0 \tag{17}$$

4. $\boldsymbol{q}_1, \boldsymbol{q}_2, \boldsymbol{q}_3$ を正規直交系ベクトルであるとする．$\boldsymbol{q}_1, \boldsymbol{q}_2, \boldsymbol{q}_3$ を列ベクトルとする行列 $\boldsymbol{Q}$ が零でないベクトル $\boldsymbol{x}$ に対して $\| \boldsymbol{Qx} \| = \|\boldsymbol{x}\|$ を満たすことを示せ.（ヒント）先ず，$\boldsymbol{Q}^T\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{I}$ を示す.

＜解答例＞

行列 $\boldsymbol{Q}^T$ の第 i 行は $\boldsymbol{q}_i^T$，$\boldsymbol{Q}$ の第 j 列は $\boldsymbol{q}_j$ であるから，$\boldsymbol{Q}^T\boldsymbol{Q}$ の i 行 j 列は $\boldsymbol{q}_i^T\boldsymbol{q}_j$ となる．$\boldsymbol{q}_i$ は正規直交系であるから，$\boldsymbol{q}_i^T\boldsymbol{q}_j = 1, i = j$ または $\boldsymbol{q}_i^T\boldsymbol{q}_j = 0, i \neq j$ となる．すなわち，$\boldsymbol{Q}^T\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{I}$ となる．次に，$\| \boldsymbol{Qx} \|$ と $\| \boldsymbol{x} \|$ を比較する．

$$\| \boldsymbol{Qx} \|^2 = (\boldsymbol{Qx})^T\boldsymbol{Qx} = \boldsymbol{x}^T\boldsymbol{Q}^T\boldsymbol{Qx} = \boldsymbol{x}^T\boldsymbol{x} = \| \boldsymbol{x} \|^2$$

これより，$\| \boldsymbol{Qx} \| = \| \boldsymbol{x} \|$ となる．

5. 行列式に関して，以下の問に答えよ．(c)，(d)，(e) は 2×2 の具体例ではなく，一般的に証明せよ．

(a) 次式を用いて,「（性質１）行列式は一つの行に関して線形関数である」こ

とを証明せよ．

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc \tag{18}$$

＜解答例＞

式 (18) の第 1 行を $a+te, b+tf$ とする．

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a+te & b+tf \\ c & d \end{vmatrix} &= (a+te)d - (b+tf)c & (19) \\ &= (ad-bc) + t(ed-fc) & (20) \\ &= \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + t \begin{vmatrix} e & f \\ c & d \end{vmatrix} & (21) \end{aligned}$$

以上より，行列式は一つの行に関して線形関数である．

(b) 上式を用いて,「（性質２）2 つの行が交換されると行列式は符号を変える」ことを証明せよ．

＜解答例＞

式 (18) で行を入れ替える．

$$\begin{vmatrix} c & d \\ a & b \end{vmatrix} = cb - ad = -(ad-bc) = -\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \tag{22}$$

よって，行の入れ替えにより，行列式の符号が変わることが示された．

(c) 性質 1 または性質 2（必要であれば両方）を用いて「（性質４）行列の 2 つの行が等しい場合は行列式は零である」ことを証明せよ．

＜解答例＞

２つの行が等しい行列を $\boldsymbol{A}$ とする．等しい行を入れ替えても行列は同じである．しかし，性質 2 より，行列式は符号を変える．従って，

$$\det \boldsymbol{A} = -\det \boldsymbol{A} \tag{23}$$

これより，$\det \boldsymbol{A} = 0$ となる．

(d) 性質 1，4 を用いて「（性質５）ある行の何倍かを他の行から引くことにより，行列式は変わらない」ことを証明せよ．

＜解答例＞

行列 $\boldsymbol{A}$ において，第 i 行の k 倍を第 j 行から引く操作を行い，その結果を行列 $\boldsymbol{B}$ とする．性質 1 より，

$$\det \boldsymbol{B} = \det \boldsymbol{A} - k \det \hat{\boldsymbol{A}} \tag{24}$$

但し，$\hat{\boldsymbol{A}}$ では，第 i 行と第 j 行が同じである．性質 4 より，

$$\det \hat{\boldsymbol{A}} = 0 \tag{25}$$

であるから，

$$\det \boldsymbol{B} = \det \boldsymbol{A} \tag{26}$$

となる．

(e) 性質 4，5 を用いて「零の行を持つ行列の行列式は零である」ことを証明せよ．
＜解答例＞
零の行を持つ行列 $\boldsymbol{A}$ において，零でない行を零の行に加え，これを $\boldsymbol{B}$ とする．性質 5 より，行列式の値は変わらない．すなわち，$\det \boldsymbol{A} = \det \boldsymbol{B}$ である．一方，行列 **B** は同じ行を含むことになるから，性質 4 より，$\det \boldsymbol{B} = 0$ となる．従って，$\det \boldsymbol{A} = 0$ となる．

6. 次の行列式を求めよ．行列の性質 1〜10，または行列式の適当な公式を用いて計算する．

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 5 & 0 & 0 \\ 3 & -3 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 & 5 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & -2 \\ 2 & -3 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{D} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

＜解答例＞

$\boldsymbol{A}$ の第 1 行，第 2 行では零の要素が多いので余因子展開を用いる．

$$\det \boldsymbol{A} = 2 \times (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} \tag{27}$$

$$= 2 \times (-1)^{1+2} \times (-1) \times (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \tag{28}$$

$$= 2 \times 2 = 4 \tag{29}$$

$\boldsymbol{B}$ は上三角行列であるから，行列式は対角要素の積である．

$$\det \boldsymbol{B} = 2 \times (-1) \times 3 \times 3 = -18 \tag{30}$$

行列 $\boldsymbol{C}$ は，第 1 行=-(第 3 行) であり，特異行列となる，従って，行列式＝0 である．
（別解法）行列 $\boldsymbol{C}$ をガウスの前進消去により変形し，零の行が発生することを示す（具体的に計算する）．零の行を含むことから，行列式＝0 となる．

行列 $\boldsymbol{D}$ をガウスの前進消去により，上三角行列に変形する．

$$\boldsymbol{D} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -4 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\to \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & -5 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \tag{31}$$

これより，

$$\det \boldsymbol{D} = 1 \times 1 \times (-1) \times 5 = -5 \tag{32}$$

7. 次の連立方程式の解をクラメルの公式により求めよ．

$$\begin{aligned} u+v-w &= 1 \\ u-3v+2w &= -1 \\ 2u+v-w &= 2 \end{aligned}$$

＜解答例＞
上式を行列の形で表す．

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} \tag{33}$$

この方程式を $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ とする．解はクラメルの公式により，$z=\det \boldsymbol{A}_z / \det \boldsymbol{A}, z = u,v,w$．$\boldsymbol{A}_z$ は $z=u,v,w$ に対して，$\boldsymbol{A}$ の第 1，2，3 列を $\boldsymbol{b}$ で置き換えた行列である．以下，具体的に計算する．

$$\det \boldsymbol{A} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -1 \tag{34}$$

$$\det \boldsymbol{A}_u = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -1 \tag{35}$$

$$\det \boldsymbol{A}_v = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -2 \tag{36}$$

$$\det \boldsymbol{A}_w = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -2 \tag{37}$$

以上より，

$$u=1 \quad v=2 \quad w=2 \tag{38}$$

8.　次の行列 $\boldsymbol{A}$ の逆行列を $adj\,\boldsymbol{A}/\det\boldsymbol{A}$ により求めよ．

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

＜解答例＞

$$\det\boldsymbol{A} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \tag{39}$$

$$adj\,\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{A}_{21} & \boldsymbol{A}_{31} \\ \boldsymbol{A}_{12} & \boldsymbol{A}_{22} & \boldsymbol{A}_{32} \\ \boldsymbol{A}_{13} & \boldsymbol{A}_{23} & \boldsymbol{A}_{33} \end{bmatrix} \tag{40}$$

$$\boldsymbol{A}_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \tag{41}$$

$$\boldsymbol{A}_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 0 \tag{42}$$

$$\boldsymbol{A}_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \tag{43}$$

$$\boldsymbol{A}_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \tag{44}$$

$$\boldsymbol{A}_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \tag{45}$$

$$\boldsymbol{A}_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \tag{46}$$

$$\boldsymbol{A}_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1 \tag{47}$$

$$\boldsymbol{A}_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 1 \tag{48}$$

$$\boldsymbol{A}_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \tag{49}$$

以上より,

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{50}$$