線形代数学第２－中間試験問題－

電子情報学類１年生（１組）　　　平成２２年度後期－ 2010.11.24 －

1. 曲線 $y = C + Dt^2$ で３点 $(t, y) = (0, 1), (1, 2), (2, 4)$ を近似するとき，誤差の二乗和を最小にするように C, D を求めよ．y，C，D，t はスカラーである．

2. 以下の問に答えよ．
 (a) 2 次元空間における直線 $y = 2x$ 上で，座標 $(-1, 2)$ に最も近い点（座標）を求めよ．
 (b) 3 次元空間における平面 $x - y + z = 0$ 上で，座標 $(1, 1, 1)$ に最も近い点（座標）を求めよ．

3. 以下の問に答えよ．
 (a) 線形独立なベクトル $\boldsymbol{a}_1 = [1, 0, 1]^T, \boldsymbol{a}_2 = [0, 1, 1]^T, \boldsymbol{a}_3 = [1, 1, -1]^T$ を互いに直交するベクトル $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ に変換せよ．
 (b) $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ が互いに直交することを確かめよ．
 (c) $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ をノルムが 1 であるベクトル $\boldsymbol{q}_1, \boldsymbol{q}_2, \boldsymbol{q}_3$ に変換せよ．
 (d) $\boldsymbol{q}_1, \boldsymbol{q}_2, \boldsymbol{q}_3$ を列ベクトルとする行列 $\boldsymbol{Q}$ を求め，ベクトル $\boldsymbol{x} = [1, 0, -1]$ に対して，$\| \boldsymbol{Qx} \| = \| \boldsymbol{x} \|$ となることを示せ．

4. 行列式の定義 (1)～(3) に基づいて，行列の性質 (a)～(d) を証明せよ．
 ＜行列式の定義＞
 (1) 行列式は行列の要素の積の和である．
 (2) 一つの積は，行列の全ての行及び列から 1 個の要素を選択して構成される．
 (3) 積には符号が付けられる．σ 番目の積の符号を $sign(\sigma)$ と表す．この積を $a_{1,\sigma(1)}a_{2,\sigma(2)}\cdots a_{n,\sigma(n)}$ と表したとき，$\sigma = [\sigma(1), \sigma(2), \cdots, \sigma(n)]$ を奇数回の入れ替えで $[1, 2, \cdots, n]$ に変換できる場合は $sign(\sigma) = -1$，偶数回の場合は $sign(\sigma) = 1$ である．
 ＜行列式の性質＞
 (a) 行列式は一つの行に関して線形である．
 (b) 対角行列の行列式は対角要素の積である．
 (c) 行を入れ替えると行列式の符号（正負）が変わる．
 (d) 零の行（一つの行の要素が全て零）を含む行列の行列式は零である．

5. 4×4 行列の行列式を要素の積（＝項）に展開すると何個の項があるか．また，$a_{13} = 0$ とすると何個の項が減少するか．

6. 行列 $\boldsymbol{A}$ は各行の要素の和が零であるとき，$det\boldsymbol{A} = 0$ となることを示せ．（ヒント）$\boldsymbol{x} = [1, 1, \cdots, 1]^T$ に対する $\boldsymbol{Ax}$ がどのように表されるか考える．

7. 行列 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{C}$，$\boldsymbol{D}$ の行列式を求めよ．行列の性質 1～10，または行列式の適当な公式を用いて計算する．

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ -1 & 5 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 0 \\ -1 & -4 & -3 & -1 \\ 2 & 2 & 4 & 2 \end{bmatrix} \boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 5 & -1 \end{bmatrix} \boldsymbol{D} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

8. 次の行列 $\boldsymbol{A}$ の逆行列を $adj\boldsymbol{A}/det\boldsymbol{A}$ により求めよ．

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$