線形代数学第１ －期末試験問題－

電子情報学類１年生（１組）　　　平成２３年度前期－ 2011.7.27 －

1. 次の命題が正しいか否かを理由を付して示せ．
 (a) $\boldsymbol{A}$ の行ベクトルが線形独立ならば，$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ は $\boldsymbol{b}$ によらず一意解または不定解を持つ．
 (b) $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ が $\boldsymbol{b}$ によらず一意解または不定解を持つならば，$\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{y}=\boldsymbol{c}$ は $\boldsymbol{c}$ に依存して一意解または不能解を持つ．
 (c) $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ が不定解を持つならば，必ず $\boldsymbol{b}$ に依存する．
 (d) $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ が不定解を持つならば，$\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{y}=\boldsymbol{c}$ も不定解を持つ．
 (e) $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 及び $\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{y}=\boldsymbol{c}$ が $\boldsymbol{b}$ や $\boldsymbol{c}$ に依存して不定解または不能解を持つならば，$\boldsymbol{A}$ の行ベクトル，及び列ベクトルは線形独立ではない．

2. 以下の集合がベクトル空間であるか否かを理由を付して示せ．
 (a) $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ の解ベクトルから成る集合
 (b) $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b},\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0}$ の解ベクトルから成る集合

3. ベクトル空間に関して以下の問いに答えよ．
 (a) $\boldsymbol{R}^4$ におけるベクトルを $\boldsymbol{x}=[u,v,w,y]^T$ と表す．$u+v+w+y=0$ 及び $u-v+w-y=0$ を満たすベクトルから成る部分空間 V の基底を求めよ．
 (b) 上記の部分空間 V に対する直交補空間 W を求めよ．

4. 次の方程式を $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ と表す．この方程式が解を持つこと (*1) と，$\boldsymbol{b}$ が $\boldsymbol{A}$ の列空間にあること (*2) が同じであることを示せ．(*1)b_1,b_2,b_3 に対する条件．(*2)$\boldsymbol{b}$ が $\boldsymbol{A}$ の列ベクトルの線形結合で表される．

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 3 \\ 1 & 4 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

5. 次の方程式 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ の一般解を求めよ。$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ の一般解と，$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ の特殊解の和の形で表せ。

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

6. 次の命題は正しいか．正しくない場合は反例を示せ．
 $\boldsymbol{R}^4$ のある基底を $\boldsymbol{v}_1\sim\boldsymbol{v}_4$ とし，$\boldsymbol{R}^4$ のある部分空間を W とするとき，$\boldsymbol{v}_1\sim\boldsymbol{v}_4$ のある部分集合が W の基底となる．

7. 次の行列に付随する４つの基本部分空間（行空間，零空間，列空間，左零空間）を求めよ（空間の次元と基底を求める）．さらに，行空間と零空間，及び列空間と左零空間が直交することを確かめよ．(基底が直交することを示す).

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$