線形代数学第２－中間試験問題－

電子情報学類１年生（１組）　　　平成２３年度後期－ 2011.12.7 －

1. 曲線 $y = C + 2^t D$ で３点 $(t, y) = (0, -1), (1, 1), (2, 4)$ を近似するとき，誤差の二乗和を最小にするように C, D を求めよ．y，C，D，t はスカラーである．

2.　次の問いに答えよ．
 (a) ベクトル $\boldsymbol{a}$ からベクトル $\boldsymbol{v}_1$，$\boldsymbol{v}_2$ で張られる空間への射影 $\boldsymbol{p}$ を求めよ．
 (b) ベクトル $\boldsymbol{v}_1$ と $\boldsymbol{v}_2$ が直交することを示せ．
 (c) 前問で求めた射影 $\boldsymbol{p}$ は，ベクトル $\boldsymbol{a}$ からベクトル $\boldsymbol{v}_1$ への射影 $\boldsymbol{p}_1$ と $\boldsymbol{v}_2$ への射影 $\boldsymbol{p}_2$ の和になっていることを示せ．

$$\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

3.　次の行列 $\boldsymbol{A}$ に対して，以下の問いに答えよ．

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

 (a) $\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}$ を求めよ．これが，対称行列となっていることを確かめよ．
 (b) $\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}$ の階数 r を求め，これらが等しいことを示せ．
 (c) $\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}$ の逆行列は存在する／しないのいずれであるかを答え，その理由を示せ．
 (d) 一般に $m \times n$ 行列 $\boldsymbol{A}$（但し，$m > n$）に対して $\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}$ の逆行列が存在する条件を $\boldsymbol{A}$ の列ベクトルの独立性に基づいて示せ．

4. 次の 2×2 行列 $\boldsymbol{A}$ の行列式 $\det \boldsymbol{A}$ が以下の式で与えられるとき，これに基づいて以下に示す行列式の性質 (a)～(d) を証明せよ．

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \qquad \det \boldsymbol{A} = ad - bc$$

 (a) 行列式は一つの行に関して線形である．
 (b) 行を入れ替えると行列式の符号 $(\pm)$ が変わる．
 (c) 同じ行を含む行列の行列式は零である．
 (d) ある行を定数倍して他の行に加えても行列式は変わらない．

5. 行列 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{C}$，$\boldsymbol{D}$ の行列式を求めよ．行列の性質 1～10，または行列式の適当な公式を用いて計算する．

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 2 & -4 \\ 0 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 5 \\ 3 & -4 & 0 & 3 \\ -2 & 5 & 0 & 2 \\ 4 & -3 & 0 & 7 \end{bmatrix} \boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 5 & 0 \\ 5 & 1 & -7 & 2 \\ -4 & 1 & 8 & -1 \end{bmatrix} \boldsymbol{D} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & -2 \\ -1 & 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

6.　以下の問に答えよ．
 (a) $\boldsymbol{A}$ を正方行列とし，$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ を満たす零でない $\boldsymbol{x}$ が存在するとき，$\det \boldsymbol{A} = 0$ であることを示せ．
 (b) $\boldsymbol{A}$ を 3×3 行列とするとき，$\boldsymbol{A}$ の行（列）空間の次元が 2 次元ならば，$\det \boldsymbol{A} = 0$ であることを示せ．
 (c) $\boldsymbol{A}$ の第 2 行を 3 倍した行列を $\boldsymbol{B}$ とする．$\boldsymbol{B}$ の第 1 行を 2 倍して第 3 行に加えた行列を $\boldsymbol{C}$ とする．さらに，$\boldsymbol{C}$ の第 2 行と第 4 行を入れ替えた行列を $\boldsymbol{D}$ とする．$\det \boldsymbol{D}$ を $\det \boldsymbol{A}$ を用いて表せ．