

線形代数学第 2

平成 23 年度後期 中間試験 問題 & 解答例

電子情報学類 1 年生 (1 組) 2011.12.7

1. 曲線 $y = C + 2^t D$ で 3 点 $(t, y) = (0, -1), (1, 1), (2, 4)$ を近似するとき, 誤差の二乗和を最小にするように C, D を求めよ. y, C, D, t はスカラーである.

< 解答例 > (配点: 10 点)

問題の条件を方程式の形式で表す.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C \\ D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} \quad (1)$$

題意はこの方程式の最小二乗解を求めることである. この方程式を $Ax = b$ と表したとき, 最小二乗解は次式で与えられる.

$$\bar{x} = (A^T A)^{-1} A^T b \quad (2)$$

具体的に計算すると次のようになる .

$$\mathbf{A}^T \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 7 & 21 \end{bmatrix} \quad (3)$$

$$(\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} = \frac{1}{14} \begin{bmatrix} 21 & -7 \\ -7 & 3 \end{bmatrix} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T &= \frac{1}{14} \begin{bmatrix} 21 & -7 \\ -7 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{14} \begin{bmatrix} 14 & 7 & -7 \\ -4 & -1 & 5 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \bar{x} &= (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{b} \\ &= \frac{1}{14} \begin{bmatrix} 14 & 7 & -7 \\ -4 & -1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} = \frac{1}{14} \begin{bmatrix} -35 \\ 23 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (6)$$

以上より ,

$$C = -\frac{5}{2} \quad D = \frac{23}{14} \quad (7)$$

2. 次の問いに答えよ .

- (a) ベクトル \mathbf{a} からベクトル $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ で張られる空間への射影 \mathbf{p} を求めよ .
- (b) ベクトル \mathbf{v}_1 と \mathbf{v}_2 が直交することを示せ .
- (c) 前問で求めた射影 \mathbf{p} は , ベクトル \mathbf{a} からベクトル \mathbf{v}_1 への射影 \mathbf{p}_1 と \mathbf{v}_2 への射影 \mathbf{p}_2 の和になっていることを示せ .

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

< 解答例 > (配点 : $5 \times 3 = 15$ 点)

- (a) ベクトル $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ で張られる空間は $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ を列ベクトルとする行列 \mathbf{A} の列空間となる。ベクトル \mathbf{a} から \mathbf{A} の列空間への射影は $\mathbf{p} = \mathbf{A}(\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{a}$

で与えられる。

$$\mathbf{A}^T \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \quad (8)$$

$$(\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{p} &= \mathbf{A}(\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{a} = \\ &= \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (10) \end{aligned}$$

(b) ベクトル \mathbf{v}_1 と \mathbf{v}_2 の内積を計算する .

$$\mathbf{v}_1^T \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 1 - 1 = 0 \quad (11)$$

\mathbf{v}_1 と \mathbf{v}_2 の内積が零であるから , これらは直交する .

(c) \mathbf{p}_1 と \mathbf{p}_2 を求める .

$$\mathbf{p}_1 = \frac{\mathbf{v}_1^T \mathbf{a}}{\mathbf{v}_1^T \mathbf{v}_1} \mathbf{v}_1 = -\frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad (12)$$

$$\mathbf{p}_2 = \frac{\mathbf{v}_2^T \mathbf{a}}{\mathbf{v}_2^T \mathbf{v}_2} \mathbf{v}_2 = \frac{0}{2} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (13)$$

以上より , $\mathbf{p} = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2$ であることが示された .

3. 次の行列 \mathbf{A} に対して , 以下の問いに答えよ .

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

(a) $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$ を求めよ . これが , 対称行列となっていることを確かめよ .

(b) \mathbf{A} と $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$ の階数 r を求め , これらが等しいことを示せ .

(c) $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$ の逆行列は存在する / しないのいずれであるかを答え , その理由を示せ .

(d) 一般に $m \times n$ 行列 A (但し, $m > n$) に対して $A^T A$ の逆行列が存在する条件を A の列ベクトルの独立性に基づいて示せ.

<解答例> (配点: $5 \times 4 = 20$ 点)

(a) $A^T A$ を計算する.

$$A^T A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \quad (14)$$

これは対称行列である.

(b) A の階数を求めるために, ガウスの前進消去を行う.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (15)$$

これより, 階数は $r = 2$ である. 一方, $A^T A$ は (a) で求めたように, 2つの行(列)ベクトルが線形独立であるから (*) 階数は $r = 2$ である. 以上より, A と $A^T A$ の階数は等しい. (*) 理由の表現はいろいろあります.

(c) $A^T A$ の逆行列は存在する.

(理由: いずれかでよい)

・ 2×2 行列であり, かつ, 階数 $r = 2$ である.

・ 全ての行(列)ベクトルが線形独立である.

(d) $m \times n$ 行列 A に対して $A^T A$ は $n \times n$ 行列となる. この行列の逆行列が存在するためには階数 $r = n$ が条件である. A と $A^T A$ の階数は等しいから, A の階数も $r = n$ となる. 階数 r は線形独立なベクトルの数であり, n は列ベクトルの数であるから, $r = n$ は「全ての列ベクトルが線形独立である」ことに相当する.

(コメント)「(全ての)列ベクトルが線形独立である」ことに相当する内容が書かれていれば OK です.

4. 次の 2×2 行列 A の行列式 $\det A$ が以下の式で与えられるとき, これに基づいて以下に示す行列式の性質 (a) ~ (d) を証明せよ.

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \quad \det A = ad - bc$$

- (a) 行列式は一つの行に関して線形である .
- (b) 行を入れ替えると行列式の符号 (±) が変わる .
- (c) 同じ行を含む行列の行列式は零である .
- (d) ある行を定数倍して他の行に加えても行列式は変わらない .

< 解答例 : 配点 : $5 \times 4 = 20$ 点 >

- (a) A の第 1 行 $[a, b]$ を線形結合 $[ta + se, tb + sf]$ とした行列を B とする .

$$\begin{aligned} \det B &= \begin{vmatrix} ta + se & tb + sf \\ c & d \end{vmatrix} = (ta + se)d - (tb + sf)c \\ &= t(ad - bc) + s(ed - fc) = t \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + s \begin{vmatrix} e & f \\ c & d \end{vmatrix} \end{aligned} \quad (16)$$

このように第 1 行における線形結合は行列式の線形結合となる .

(コメント) $t \rightarrow 1, s \rightarrow t$ でも OK .

- (b) A の行を入れ替えた行列を B とする .

$$\begin{aligned} \det B &= \begin{vmatrix} c & d \\ a & b \end{vmatrix} = bc - ad = -(ad - bc) \\ &= - \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \end{aligned} \quad (17)$$

B の行列式は A の行列式とは符号が逆になる .

- (c) A の第 2 行を $[a, b]$ とした行列を C とする .

$$\det C = \begin{vmatrix} a & b \\ a & b \end{vmatrix} = ab - ab = 0 \quad (18)$$

このように, 同じ行を含む行列式は零になる .

- (d) A の第 1 行を t 倍して, 第 2 に加えた行列を D とする . (a) の性質より,

$$\det D = \begin{vmatrix} a & b \\ c + ta & d + tb \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + t \begin{vmatrix} a & b \\ a & b \end{vmatrix} \quad (19)$$

(c) の性質より, 上式の第 2 項は零であるから, $\det D = \det A$ となる .

5. 行列 A, B, C, D の行列式を求めよ . 行列の性質 1 ~ 10, または行列式の

適当な公式を用いて計算する.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 2 & -4 \\ 0 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 5 \\ 3 & -4 & 0 & 3 \\ -2 & 5 & 0 & 2 \\ 4 & -3 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$
$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 5 & 0 \\ 5 & 1 & -7 & 2 \\ -4 & 1 & 8 & -1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & -2 \\ -1 & 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

<解答例> (配点: $5 \times 4 = 20$ 点)

\mathbf{A} は上三角行列であるから, 行列式は対角要素の積である.

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 2 & -4 \\ 0 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 1 \times 2 \times (-1) \times 5 = -10 \quad (20)$$

\mathbf{B} の第3列は零であるから, $\det \mathbf{B} = 0$.

\mathbf{C} は第1行に零の要素が多いので, 第1行に関して余因子に展開する.

$$\det \mathbf{C} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 5 & 0 \\ 5 & 1 & -7 & 2 \\ -4 & 1 & 8 & -1 \end{vmatrix} = (-1)^{1+3} 3 \begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 2 \\ -4 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$
$$= 3(-1)^{1+3} 3 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 9(-1-2) = -27 \quad (21)$$

D は特徴がないので、ガウスの前進消去により上三角行列に変形する。

$$\begin{aligned}
 D &= \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & -2 \\ -1 & 2 & 1 & -1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \\
 &\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad (22)
 \end{aligned}$$

ガウスの前進消去により行列式は変わらないので、 $\det D$ は上記の三角行列の行列式と同じである。

$$\det D = 1 \times (-1) \times (-1) \times 3 = 3 \quad (23)$$

6. 以下の問に答えよ。

- (a) A を正方行列とし、 $Ax = 0$ を満たす零でない x が存在するとき、 $\det A = 0$ であることを示せ。
- (b) A を 3×3 行列とすると、 A の行 (列) 空間の次元が 2 次元ならば、 $\det A = 0$ であることを示せ。
- (c) A の第 2 行を 3 倍した行列を B とする。 B の第 1 行を 2 倍して第 3 行に加えた行列を C とする。さらに、 C の第 2 行と第 4 行を入れ替えた行列を D とする。 $\det D$ を $\det A$ を用いて表せ。

<解答例> (配点：5 × 3 = 15 点)

- (a) A を $n \times n$ 行列とする。 $Ax = 0$ を満たす零でない x が存在することは、不定解が存在することであり、 $n > r$ となる。この場合、 A は特異行列となり行列式は零となる。
- (b) A の行空間の次元は階数 r である。行空間が 2 次元であるので、 $r = 2$ である。一方、 A は 3×3 行列であるから $n = 3$ である。以上より、 $r < n$ となり、 A は特異行列となり、 $\det A = 0$ である。
- (c) 行列の一つの行を t 倍すると行列式も t 倍されるから、

$$\det B = 3 \det A \quad (24)$$

行列のある行を定数倍して他の行に加えても行列式は変わらないから，

$$\det C = \det B \quad (25)$$

行列の行を入れ替えると行列式の符号 (±) が変わるから，

$$\det D = -\det C \quad (26)$$

以上より，

$$\det D = -\det C = -\det B = -3 \det A \quad (27)$$