平成27年度前期
電子情報工学科（4年生）

情報理論 I
期末試験
＜問題と解答例／70点満点＞

（平均点＝61.3点，88%）

2015．9．30

- 教科書，資料等の持ち込み不可．
- 電卓使用可．
- 解答は分数（既約）または小数（有効数字3桁以内）で示すこと．

1

採点ミス，集計ミス等に対する申し出

採点ミス，集計ミス等がありましたら，学生が自分でミスの内容を答案用紙にボールペン（赤，なければ他の色）で記入する．

その答案を先生（答案返却）に渡してください．

10月5日（月）午前に私がその答案を受け取って内容を確認します．

答案を返却する先生は学生からの申し出に対して，内容の確認をしません．私に，そのまま答案用紙を渡すことになっています．

2

問題1（5点×2題＝10点）

3ビット分の雑音が混入しても誤り検出，誤り訂正が可能であるための符号語間のハミング距離の最小値を求めよ．

① ハミング距離の最小値が偶数の場合
② ハミング距離の最小値が奇数の場合

3

＜解答例1＞

（1）符号間の最小距離が偶数の場合$(n=2b)$

・誤り検出可能

$2b-1=3 \rightarrow b=\frac{4}{2}=2,$　　最小距離 $=2b=4$

・誤り訂正可能

$b-1=3 \rightarrow b=4,$　　最小距離 $=2b=8$

（2）符号間の最小距離が奇数の場合$(n=2b+1)$

・誤り検出可能

$2b=3 \rightarrow b=\frac{3}{2} \rightarrow 2,$　　最小距離 $=2b+1=5$

・誤り訂正可能

$b=3,$　　最小距離 $=2b+1=7$

4

＜解答例2＞

（1）符号間の最小距離が偶数の場合

・誤り検出可能

●○○○○●　　最小距離＝4

（雑音ビットが隣の符号ビットと重ならない最小距離）

（注釈）●符号ビット，○，○雑音ビット

・誤り訂正可能

●○○○○○○○○●　　最小距離＝8

（隣の符号からの雑音ビットが重ならない最小距離）

（2）符号間の最小距離が奇数の場合

・誤り検出可能

●○○○○○●　　最小距離＝5

・誤り訂正可能

●○○○○○○○●　　最小距離＝7

5

問題2（5点×2題＝10点）

長さ15の符号語（情報ビット＝10，検査ビット＝5）の三角形符号が次のようになった．以下の問に答えよ．

$$\boldsymbol{Y}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & p_1 \\ 0 & 1 & 1 & p_2 & \\ 0 & 1 & p_3 & & \\ 1 & p_4 & & & \\ p_5 & & & & \end{bmatrix}$$

① 送信側で付加する検査ビット$p_1 \sim p_5$を求めよ．

② 受信側でy_iを計算したところ，$y_1=1, y_3=1$であった．1ビットの誤りが発生しているとすると，どのビットで誤りが発生したか，○行□列で答えよ．

6

＜解説＞

（1） p_iは次式で与えられる

$$p_1 = x_{11} \oplus x_{12} \oplus x_{13} \oplus x_{14} = 0$$
$$p_2 = x_{21} \oplus x_{22} \oplus x_{23} \oplus x_{14} = 1$$
$$p_3 = x_{31} \oplus x_{32} \oplus x_{23} \oplus x_{13} = 0$$
$$p_4 = x_{41} \oplus x_{32} \oplus x_{22} \oplus x_{12} = 1$$
$$p_5 = x_{41} \oplus x_{31} \oplus x_{21} \oplus x_{11} = 0$$

（2）y_iは送信時は全て0である．受信側で誤りが生じると $y_i = 1$となる．$y_1 = 1, y_3 = 1$であることは

$$y_1 = p_1 \oplus x_{11} \oplus x_{12} \oplus x_{13} \oplus x_{14}$$
$$y_3 = p_3 \oplus x_{31} \oplus x_{32} \oplus x_{23} \oplus x_{13}$$

に共通に含まれるx_{13}に誤りがある．
従って，1行3列に誤りがある．

問題3（５点×２題＝１０点）

次の符号が一意復号可能であるが，瞬時復号可能ではないことを説明せよ．

$$A = 0$$
$$B = 01$$
$$C = 011$$

（ヒント）
001011を受信したときの復号について考える．

＜解答例＞

◆一意的復号可能（5点）

この符号の特徴は最初が必ず0である点である．
001011を受信した場合，
最初の0…次に0が来るので，0が一つの符号となり，Aと判定される．
次の01…次に0が来るので，01が一つの符号となり，Bと判定される．
次の011…3ビットの符号であるからCと判定される．

◆瞬時復号不可能（5点）

0を受信　→ Aと判定できない
次に0が来ればA, 1が来ればBとなる．
01を受信　→ Bと判定できない
次に0が来ればB, 1が来ればCとなる．
011を受信 → Cと判定できる

問題4（３点×４題＝１２点）

ハミング符号について以下の問に答えよ．
但し，$n = 6, k = 3$とし，情報ビットを$x_1 \sim x_3$，検査ビットを$c_1 \sim c_3$とし，符号語を$\boldsymbol{w} = (x_1, x_2, x_3, c_1, c_2, c_3)$とする．さらに，$c_1 \sim c_3$を$x_1 \sim x_3$の排他的論理和で次のように表す．

$$c_1 = x_1 \oplus x_2,\quad c_2 = x_2 \oplus x_3,\quad c_3 = x_1 \oplus x_3$$

① $s_1 \sim s_3$を$x_1 \sim x_3, c_1 \sim c_3$の排他的論理和で表せ．
② $\boldsymbol{w} = (x_1, x_2, x_3, c_1, c_2, c_3)$において，誤りが生じているビットとそれに対するシンドローム(s_1, s_2, s_3)を求めよ．
③ 情報ビット$(x_1, x_2, x_3) = (1, 0, 1)$に対する符号語 $\boldsymbol{w} = (x_1, x_2, x_3, c_1, c_2, c_3)$を求めよ．
④ $(1, 0, 1, 0, 1, 0)$を受信した．シンドロームを用いて誤り検出を行い，誤りがあれば訂正後の符号語を示せ．

＜解答例＞

問題の条件

$c_1 = x_1 \oplus x_2$,　　$c_2 = x_2 \oplus x_3$,　　$c_3 = x_1 \oplus x_3$

より，

①

$$s_1 = x_1 \oplus x_2 \oplus c_1$$
$$s_2 = x_2 \oplus x_3 \oplus c_2$$
$$s_3 = x_1 \oplus x_3 \oplus c_3$$

②

誤りビット	シンドローム s_1	s_2	s_3
誤り無し	0	0	0
x_1	1	0	1
x_2	1	1	0
x_3	0	1	1
c_1	1	0	0
c_2	0	1	0
c_3	0	0	1

③情報ビット$(x_1, x_2, x_3) = (1, 0, 1)$

$c_1 = x_1 \oplus x_2 = 1 \oplus 0 = 1$
$c_2 = x_2 \oplus x_3 = 0 \oplus 1 = 1$
$c_3 = x_1 \oplus x_3 = 1 \oplus 1 = 0$
$\boldsymbol{w} = (x_1, x_2, x_3, c_1, c_2, c_3)$
$= (1, 0, 1, 1, 1, 0)$

④ $\boldsymbol{w} = (x_1, x_2, x_3, c_1, c_2, c_3) = (1, 0, 1, 0, 1, 0)$

$s_1 = x_1 \oplus x_2 \oplus c_1 = 1 \oplus 0 \oplus 0 = 1$
$s_2 = x_2 \oplus x_3 \oplus c_2 = 0 \oplus 1 \oplus 1 = 0$
$s_3 = x_1 \oplus x_3 \oplus c_3 = 1 \oplus 1 \oplus 0 = 0$

$(s_1, s_2, s_3) = (1, 0, 0)$であるから，②の結果より$c_1$に誤りがある．$c_1$を$0 \to 1$に訂正する．
訂正後の符号→$\boldsymbol{w} = (1, 0, 1, 1, 1, 0)$

問題5（5点×2題＝10点）

巡回符号に関して以下の問に答えよ．但し，$n = 7, k = 4, G(x) = x^3 + x + 1$とする．

以下に示す情報ビット$(a), (b)$に対する符号語を求めよ．但し，次の手順で計算し，その計算過程も示すこと．

$p(x) \to x^3 p(x) \to G(x)$で割る$\to R(x) \to F(x)$

$(a)\ (d_3\ d_2\ d_1\ d_0) = (1\ 0\ 1\ 0)$
$(b)\ (d_3\ d_2\ d_1\ d_0) = (1\ 0\ 0\ 1)$

＜解答例＞

$(a)\ (d_3\ d_2\ d_1\ d_0) = (1\ 0\ 1\ 0)$
$p(x) = x^3 + x \to x^3 p(x) = x^6 + x^4$
$\to G(x) = x^3 + x + 1$で割る→余り$R(x) = x + 1$
$\to F(x) = x^3 p(x) + R(x) = x^6 + x^4 + x + 1$
$\to \boldsymbol{w} = (1\ 0\ 1\ 0\ 0\ 1\ 1)$　割り算の計算過程を示すこと．

$(b)\ (d_3\ d_2\ d_1\ d_0) = (1\ 0\ 0\ 1)$
$p(x) = x^3 + 1 \to x^3 p(x) = x^6 + x^3$
$\to G(x) = x^3 + x + 1$で割る→余り$R(x) = x^2 + x$
$\to F(x) = x^3 p(x) + R(x) = x^6 + x^3 + x^2 + x$
$\to \boldsymbol{w} = (1\ 0\ 0\ 1\ 1\ 1\ 0)$　割り算の計算過程を示すこと．

問題6（5点×2題＝10点）

巡回符号に関して以下の問に答えよ．但し，$n = 7, k = 4, G(x) = x^3 + x + 1$とする．

受信側で以下に示す符号語$(a), (b)$を受信した．誤り(1bit)を含むかどうか調べよ．また，誤りがある場合はどのビットが誤っているか調べ，
訂正後の符号を示せ．
（計算過程を示すこと）

$(a)\ (d_3\ d_2\ d_1\ d_0\ c_2\ c_1\ c_0)$
$= (0\ 0\ 1\ 1\ 0\ 1\ 0)$
$(b)\ (d_3\ d_2\ d_1\ d_0\ c_2\ c_1\ c_0)$
$= (1\ 1\ 0\ 1\ 0\ 0\ 1)$

誤りビット	エラーパターン		
	e_2	e_1	e_0
d_3	1	0	1
d_2	1	1	1
d_1	1	1	0
d_0	0	1	1

＜解答例＞
(a)
受信符号の多項式：$F'(x) = x^4 + x^3 + x$を$G(x) = x^3 + x + 1$で割ったときの余り$E(x) = x^2 + x + 1$となる．
$(e_2, e_1, e_0) = (1\ 1\ 1)$であるから，問題に添附された表より$d_2$に誤りがある．$d_2$を$0 \to 1$に訂正する．
訂正後の符号$= (0\ 1\ 1\ 1\ 0\ 1\ 0)$
（割り算の計算過程を示すこと）

(b)
受信符号の多項式：$F'(x) = x^6 + x^5 + x^3 + 1$を$G(x) = x^3 + x + 1$で割ったときの余りは$E(x) = 0$となるから，受信符号$(1\ 1\ 0\ 1\ 0\ 0\ 1)$には誤りがない．
（割り算の計算過程を示すこと）

問題7（2点×2題＋2点×2題＝8点）

巡回符号に関して以下の問に答えよ．但し，$n = 7, k = 4, G(x) = x^3 + x + 1$，送信符号の多項式を$F(x) = G(x)Q(x)$，符号語を以下のようにする．

$\boldsymbol{w} = (d_3, d_2, d_1, d_0, c_2, c_1, c_0)$

① d_1に誤りが発生すると受信符号の多項式は
$F'(x) = G(x)Q(x) +$（ア）
となる．（ア）を求めよ．
② （ア）を$G(x) = x^3 + x + 1$で割り，その余りを$E(x) = e_2 x^2 + e_1 x + e_0$とする．$(e_2\ e_1\ e_0)$を求めよ．割り算の計算過程も示すこと．
③ c_2 に誤りが発生する場合について，①，②を繰り返せ．

＜解答例＞

$$F(x) = d_3x^6 + d_2x^5 + d_1x^4 + d_0x^3$$
$$+c_2x^2 + c_1x^1 + c_0x^0 \cdots (1)$$

① d_1に誤りが発生したときの受信符号の多項式

$$F'(x) = G(x)Q(x) + x^4$$

従って，（ア）＝ x^4・・・2点

② x^4を$G(x) = x^3 + x + 1$で割ると余りは

$$E(x) = e_2x^2 + e_1x + e_0 = x^2 + x$$

となる．従って，$(e_2, e_1, e_0) = (1, 1, 0)$ ・・・2点

（割り算の計算過程を示すこと）

③ C_2に誤りが発生した場合

式（1）より，（ア）＝ x^2・・・2点

x^2を$G(x)$で割ると余りは$E(x) = x^2$であるから，

$(e_2, e_1, e_0) = (1, 0, 0)$・・・2点

（割り算の計算過程を示すこと）