平成28年度前期
電子情報工学科（5年生）

システム数理工学

期末試験（問題と解答例）

75点満点

2016. 9. 21

＜注意事項＞
教科書，講義資料，ノート等の使用不可.
電卓使用可
解答は分数（既約）または小数（有効数字3桁）で表すこと.

問題1（５点×２題＝１０点）

次の関数について以下の問に答えよ.

$$f(x) = 2x^3 - 6x^2 + 3$$

① $f(x)$の極大値を与えるxを求める勾配法の更新式を求めよ．但し，ステップサイズをμとする.

② 初期値を$x(0) = -1$，ステップサイズを$\mu = 0.03$としたときの$x(1), x(2)$を求めよ.

システム数理（H28前期）　1/5

問題 1

$$x(n+1) = x(n) + \mu \frac{d f(x(n))}{d x(n)}$$

$$f'(x) = 6x^2 - 12x$$

① $x(n+1) = x(n) + \mu\left(6x^2(n) - 12x(n)\right)$ //

② $x(0) = -1,\quad \mu = 0.03$

$x(1) = -1 + 0.03\left(6\times(-1)^2 - 12\times(-1)\right) = -0.46$ // $\left(-\frac{23}{50}\right)$

$x(2) = -0.46 + 0.03\left(6\times(-0.46)^2 - 12\times(-0.46)\right) \fallingdotseq -0.256$ //

問題2（５点×４題＝２０点）

次の関数について以下の問に答えよ.

$$f(x) = 2x^3 - 7x^2 + x + 4$$

① $f(x)$の極大値／極小値を与えるxを求めるニュートン法の更新式を求めよ.

② 初期値を$x(0) = -1$としたときの$x(1), x(2)$を求めよ. このとき求まる極値は極大値／極小値のいずれか.

③ 初期値を$x(0) = 3$としたときの$x(1), x(2)$を求めよ. このとき求まる極値は極大値／極小値のいずれか.

④ 極大値／極小値が求まる初期値の範囲を求めよ.

問題 2

① $x(n+1) = x(n) - \frac{f'(x)}{f''(x)}$

$f(x) = 2x^3 - 7x^2 + x + 4$

$f' = 6x^2 - 14x + 1$

$f'' = 12x - 14$

$\therefore\ x(n+1) = x(n) - \frac{6x^2(n) - 14x(n) + 1}{12x(n) - 14}$ //

② $x(0) = -1$

$x(1) = -1 - \frac{6 + 14 + 1}{-12 - 14} = -\frac{5}{26} \fallingdotseq -0.192$ //

$x(2) = -0.192 - \frac{6\times(-0.192)^2 - 14\times(-0.192) + 1}{12\times(-0.192) - 14} \fallingdotseq 0.0477$ // $\left(= \frac{263}{5512}\right)$

$f''(-1) < 0$ より 極大値 //

③ $x(0) = 3$

$x(1) = \frac{53}{22} \fallingdotseq 2.41$ //

$x(2) = \frac{8185}{3608} \fallingdotseq 2.27$ //

$f''(3) = 22 > 0$ より 極小値 //

④ $f''(x) > 0$ … 極小値　$12x - 14 > 0$　$\therefore\ x > \frac{7}{6}$ //

$f''(x) < 0$ … 極大値　$12x - 14 < 0$　$\therefore\ x < \frac{7}{6}$ //

問題3（10点＋5点＝15点）

4点$(-1,2), (-1,4), (1,1), (2,3)$に最小二乗法により2次曲線$y = ax^2 + bx + c$を当てはめよ．
さらに，横軸x，縦軸yとして，上記の4点をプロットし，同時に上で得られた2次曲線を描け（$x = -2, -1, 0, 1, 2$におけるyを計算し，これらの点を曲線で結ぶ）．

問題3

$$J = \frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{4}(y_\alpha - a x_\alpha^2 - b x_\alpha - c)^2$$

$$\frac{\partial J}{\partial a} = \sum_{\alpha=1}^{4}(y_\alpha - a x_\alpha^2 - b x_\alpha - c)\times(-x_\alpha^2)$$

$$= \left(\sum_{\alpha=1}^{4} x_\alpha^4\right)a + \left(\sum_{\alpha=1}^{4} x_\alpha^3\right)b + \left(\sum_{\alpha=1}^{4} x_\alpha^2\right)c - \left(\sum_{\alpha=1}^{4} x_\alpha^2 y_\alpha\right)$$

$$\frac{\partial J}{\partial b} = \sum_{\alpha=1}^{4}(y_\alpha - a x_\alpha^2 - b x_\alpha - c)\times(-x_\alpha)$$

$$= \left(\sum_{\alpha=1}^{4} x_\alpha^3\right)a + \left(\sum_{\alpha=1}^{4} x_\alpha^2\right)b + \left(\sum_{\alpha=1}^{4} x_\alpha\right)c - \left(\sum_{\alpha=1}^{4} x_\alpha y_\alpha\right) = 0$$

$$\frac{\partial J}{\partial c} = \sum_{\alpha=1}^{4}(y_\alpha - a x_\alpha^2 - b x_\alpha - c)\times(-1)$$

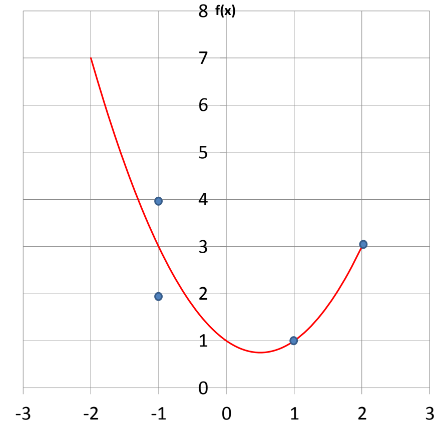
$$= \left(\sum_{\alpha=1}^{4} x_\alpha^2\right)a + \left(\sum_{\alpha=1}^{4} x_\alpha\right)b + \left(\sum_{\alpha=1}^{4} 1\right)c - \left(\sum_{\alpha=1}^{4} y_\alpha\right) = 0$$

$$\begin{cases} \sum_{\alpha=1}^{4} x_\alpha = 1,\ \sum_{\alpha=1}^{4} x_\alpha^2 = 7,\ \sum_{\alpha=1}^{4} x_\alpha^3 = 7,\ \sum_{\alpha=1}^{4} x_\alpha^4 = 19 \\ \sum_{\alpha=1}^{4} x_\alpha^2 y_\alpha = 19,\ \sum_{\alpha=1}^{4} x_\alpha y_\alpha = 1,\ \sum_{\alpha=1}^{4} y_\alpha = 10 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 19a + 7b + 7c = 19 \\ 7a + 7b + c = 1 \\ 7a + b + 4c = 10 \end{cases}$$

$$a = 1,\quad b = -1,\quad c = 1$$

$$y = x^2 - x + 1 \quad /\!/$$



問題4（10点）

次の連立方程式に対する最小二乗解を求めよ．

$$x + 2y = 1$$
$$x - y = 2$$
$$2x - y = 3$$

問題5（10点）

次の連立方程式を満たす解のなかでノルム最小の解を求めよ．

$$2x + y - 3z = 2$$
$$x - 2y + z = 1$$

問題4

$$J = \frac{1}{2}\{(x+2y-1)^2 + (x-y-2)^2 + (2x-y-3)^2\}$$

$\frac{\partial J}{\partial x} = 0$ より　$6x - y - 9 = 0$　…①

$\frac{\partial J}{\partial y} = 0$ より　$-x + 6y + 3 = 0$　…②

①＋②×6

$35y = -9$　∴ $y = -\frac{9}{35} \fallingdotseq -0.257$ //

② より　$x = \frac{-6\times 9}{35} + 3 = \frac{51}{35} \fallingdotseq 1.46$ //

（別解）

$$\begin{pmatrix}1&2\\1&-1\\2&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} \rightarrow A x = b \text{ とする.}$$

最小二乗解 : $x = (A^TA)^{-1}A^Tb$

$$A^TA = \begin{pmatrix}1&1&2\\2&-1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2\\1&-1\\2&-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}6&-1\\-1&6\end{pmatrix},\quad (A^TA)^{-1}=\frac{1}{35}\begin{pmatrix}6&1\\1&6\end{pmatrix}$$

$$(A^TA)^{-1}A^T = \frac{1}{35}\begin{pmatrix}6&1\\1&6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&2\\2&-1&-1\end{pmatrix} = \frac{1}{35}\begin{pmatrix}8&5&11\\13&-5&-4\end{pmatrix}$$

$$(A^TA)^{-1}A^Tb = \frac{1}{35}\begin{pmatrix}8&5&11\\13&-5&-4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} = \frac{1}{35}\begin{pmatrix}51\\-9\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}51/35\\-9/35\end{pmatrix} /\!/$$

問題5

$$F = \frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2) - \lambda_1(2x+y-3z-2) - \lambda_2(x-2y+z-1)$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial x} &= x - 2\lambda_1 - \lambda_2 = 0\\ \frac{\partial F}{\partial y} &= y - \lambda_1 + 2\lambda_2 = 0\\ \frac{\partial F}{\partial z} &= z + 3\lambda_1 - \lambda_2 = 0\end{aligned}\right\} \rightarrow \begin{aligned}x &= 2\lambda_1 + \lambda_2\\ y &= \lambda_1 - 2\lambda_2\\ z &= -3\lambda_1 + \lambda_2\end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial \lambda_1} &= 2x + y - 3z - 2 = 0\\ \frac{\partial F}{\partial \lambda_2} &= x - 2y + z - 1 = 0\end{aligned}\right\} \rightarrow \left.\begin{aligned}14\lambda_1 - 3\lambda_2 &= 2\\ -3\lambda_1 + 6\lambda_2 &= 1\\ \therefore \lambda_1 = \frac{1}{5},\ \lambda_2 &= \frac{\cancel{3}4}{15}\end{aligned}\right\} /\!/$$

$$x = \frac{2}{5} + \frac{\cancel{3}4}{15} = \frac{2}{3} /\!/$$

$$y = \frac{1}{5} - \frac{2\times\cancel{3}4}{15} = -\frac{1}{3} /\!/$$

$$z = -\frac{3}{5} + \frac{4}{15} = \frac{-9+4}{15} = -\frac{1}{3} /\!/$$

問題6（10点）

ある物理量xとyは$y = ax + b$の関係があるものとする.

観測データを(x_α, y_α)とするとき，入力x_αに対する真の値$\bar{y} = ax_\alpha + b$にランダムな誤差ϵ_αが加わったものがy_αであるとする.

$$y_\alpha = ax_\alpha + b + \epsilon_\alpha, \qquad \alpha = 1, 2, \dots, N$$

ここで，ϵ_αは$N(0, \sigma^2)$に従って独立に発生するとみなす.

(x_α, y_α)が次のように与えられとき，a, bの最尤推定量を求めよ.

$$(x_\alpha, y_\alpha) = (1, 0.9),\ (2, 2.9),\ (3, 2.9),\ (4, 5)$$

問題6

$$J = \frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{4}(y_\alpha - ax_\alpha - b)^2$$

$$\frac{\partial J}{\partial a} = \left(\sum_{\alpha=1}^{4} x_\alpha^2\right)a + \left(\sum_{\alpha=1}^{4} x_\alpha\right)b - \left(\sum_{\alpha=1}^{4} x_\alpha y_\alpha\right) = 0$$

$$\frac{\partial J}{\partial b} = \left(\sum_{\alpha=1}^{4} x_\alpha\right)a + \left(\sum_{\alpha=1}^{4} 1\right)b - \left(\sum_{\alpha=1}^{4} y_\alpha\right) = 0$$

$$\begin{cases}\sum_{\alpha=1}^{4} x_\alpha = 10,\quad \sum_{\alpha=1}^{4} x_\alpha^2 = 30,\quad \sum_{\alpha=1}^{4} x_\alpha y_\alpha = 35.4\\ \sum_{\alpha=1}^{4} y_\alpha = 11.7\end{cases}$$

$$\begin{cases}30a + 10b = 35.4\\ 10a + 4b = 11.7\end{cases}$$

$$a = 1.23 \quad \left(\frac{123}{100}\right) /\!/$$

$$b = -0.15 \quad \left(-\frac{3}{20}\right) /\!/$$