ディジタル通信と信号処理

試験問題と解答例

（火曜2限クラス）

平成26年7月22日（火）

＜56点満点＞

問題1（3点×6＝18点）

次に示すスケーリング係数と零点，極に対して以下の問に答えよ．

スケーリング係数： $h_0 = 1$

零点： $r_z = 1, \quad f_z = 2.6\ Hz$

極： $r_p = 0.8, \quad f_p = 1.4\ Hz$

a. 零点と極を極形式で表せ．

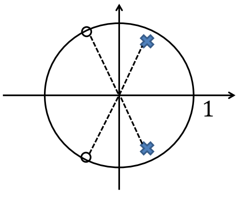
$$\omega_z T = \frac{2\pi f_z}{f_s} = 2\pi \times \frac{2.6}{8} = 0.65\pi = 2.04\ [radian]$$

$$\omega_p T = \frac{2\pi f_p}{f_s} = 2\pi \times \frac{1.4}{8} = 0.35\pi = 1.10\ [radian]$$

零点＝ $1 \cdot e^{\pm j2.04} = e^{\pm j2.04}$

極　＝ $0.8e^{\pm j1.10}$

b. 零点と極を複素平面上に図示せよ．単位円も図示し，零点は○，極は×で示せ．



零点：117度

極：　63度

---

c. 伝達関数の係数$(a_0, a_1, a_2, b_1, b_2)$を求めよ．

$$H(z) = \frac{a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}}{1 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}$$

伝達関数の零点と極

Zero-r	1	Zero-f	2.6	[Hz]
Pole-r	0.8	Pole-f	1.4	[Hz]

伝達関数の係数（上：分子／下：分母）

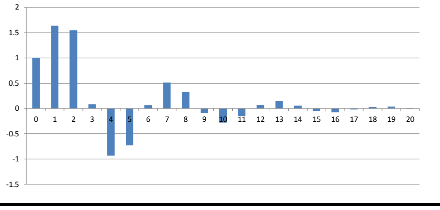
a0	1	a1	0.906	a2	1
b0	1	b1	-0.727	b2	0.64

---

d. $H(z)$の振幅特性とインパルス応答を求めよ．振幅特性は$f = 0, 1, 2, 3, 4Hz$における数値とグラフ（全体）を示し，インパルス応答は，$n = 0, 1, 2, 3, 4$における数値とグラフ（全体）を示せ．

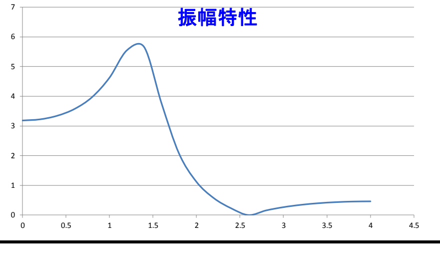
$h(0) = 1, h(1) = 1.63, h(2) = 1.55, h(3) = 0.08$
$h(4) = -0.932$

インパルス応答



周波数	振幅特性
0 Hz	3.18
1	4.62
2	1.12
3	0.266
4	0.462

振幅特性



e.　次の入力信号に対する出力信号$y(n)$をグラフで示せ．

$$x(n) = 1.5\cos(2\pi f_1 nT) + 3\cos(2\pi f_2 nT)$$
$$f_1 = 1.2\ Hz, \qquad f_2 = 2.6\ Hz$$

入力信号（振幅＝c1，c2，周波数＝f1，f2）

c1	1.5	f1	1.2	c2	3	f2	2.6	Impulse	

h0	1	スケーリング係数	

伝達関数の零点と極

Zero-r	1	Zero-f	2.4	[Hz]
Pole-r	0.6	Pole-f	1.5	[Hz]

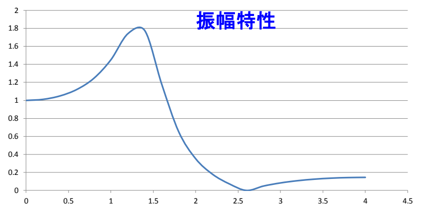
伝達関数の係数（上：分子／下：分母）

a0	1	a1	0.61622	a2	1
b0	1	b1	-0.4599	b2	0.36

f.　振幅特性が$f = 0Hz$で$\left|H\left(e^{j\omega}\right)\right| = 1$となるようにスケーリング係数$h_0$を調整せよ．$h_0$の値と調整後の振幅特性をグラフで示せ．

$f = 0\ Hz$における振幅特性が3.184であるから，

$$h_0 = \frac{1}{3.184} = 0.314$$



次に，出力信号におけるf_1成分が入力信号の2倍になるようにスケーリング係数h_0を決める．
$h_0 = 1$としたとき，$f_1 = 1.6Hz$における振幅特性が2.026であるから，

$$h_0 = \frac{2}{2.026} = 0.987$$

h0	0.987	スケーリング係数	

伝達関数の零点と極

Zero-r	1	Zero-f	2.4	[Hz]
Pole-r	0.6	Pole-f	1.5	[Hz]

伝達関数の係数（上：分子／下：分母）

a0	0.987	a1	0.608	a2	0.987
b0	1	b1	-0.460	b2	0.36

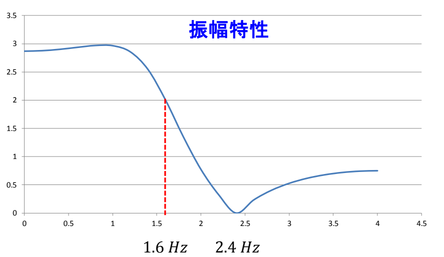
問題2（3点×4＝12点）

入力信号$x(n)$が$f_1 = 1.6Hz, f_2 = 2.4Hz$の周波数成分からなるものとする．$H(z)$を通すことにより，f_1成分を2倍にし，f_2成分を阻止したい．伝達関数$H(z)$を設計せよ．但し，極は$(r_p = 0.6, f_p = 1.5Hz)$とする．

a.　伝達関数$H(z)$の係数$(a_0, a_1, a_2, b_1, b_2)$を求めよ．

f_2成分を阻止するために，零点を$(r_z = 1, f_z = 2.4\ Hz)$とする．スケーリング係数は初めは$h_0 = 1$とする．

b.　$H(z)$の振幅特性をグラフで示せ．

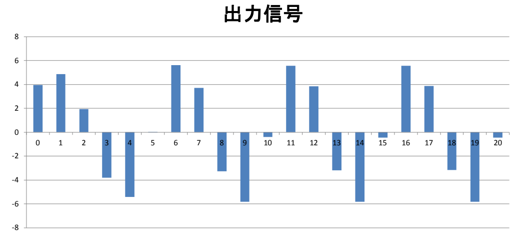


c. 次の信号を入力したときの出力信号をグラフで示せ．

$$x(n) = 3\cos(\omega_1 nT) + \cos(\omega_2 nT), \omega_i = 2\pi f_i$$

入力信号（振幅＝c1，c2，周波数＝f1，f2）

c 1	3	f 1	1.6	c 2	1	f 2	2.4	Impulse



c. 周波数領域を標本化することにより生じる時間領域の周期T_0をΔfで表せ．

$$T_0 = 1/\Delta f$$

d. 時間領域で折り返し歪みが生じない条件をΔfで表せ．

$$1sec < T_0 = \frac{1}{\Delta f}$$

$$\Delta f < \frac{1}{1sec} = 1Hz$$

d. cの結果から，出力信号（定常応答の部分）には$f_1 = 1.6Hz$の成分のみが含まれていることを示せ．（ヒント）1周期のサンプル数を調べる．

$n = 10$以降で定常応答になっている．1周期のサンプル数が5サンプルであり，周波数は

$$f = \frac{f_s}{5} = \frac{8}{5} = 1.6\ Hz$$

であることが分かる．

e. 設問b，dの結果より，サンプル数Nに対する条件を求めよ（有効数字4桁，5桁目を四捨五入）．

$$N = \frac{f_s}{\Delta f}, \quad 7kHz < f_s, \quad \Delta f < 1Hz$$

以上より，$7000 < N$

f. 設問eの条件を満たすNを2のべき乗の最小値で表せ（4桁で表示）．

$$7000 < N = 8192 = 2^{13}$$

g. 設問fで求めたNに対する$\Delta f, T_0, f_s$の一例を示せ．但し，$\Delta f = 0.9Hz$とする．f_sは4桁で表示する．

$$\Delta f = 0.9Hz, T_0 = \frac{1}{\Delta f} = 1.11sec, f_s = \Delta f N = 7373Hz$$

問題3（2点×7＝14点）

アナログ信号$x(t)$が$0 \sim 1$秒に分布し，そのフーリエ変換$X(j\omega)$は$0 \sim 3.5kHz$に分布しているものとする．

a. 標本化周波数f_sに対する条件を求めよ．

$$2 \times 3.5kHz = 7kHz < f_s$$

b. 時間領域と周波数領域のサンプル数をNとするとき，周波数領域の標本間隔Δfをf_sとNで表せ．

$$\Delta f = \frac{f_s}{N}$$

問題4（4点×3＝12点）

次式は4サンプルの離散フーリエ変換（DFT）である．

$$\begin{bmatrix} X(0) \\ X(1) \\ X(2) \\ X(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w^0 & w^0 & w^0 & w^0 \\ w^0 & w^1 & w^2 & w^3 \\ w^0 & w^2 & w^0 & w^2 \\ w^0 & w^3 & w^2 & w^1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(0) \\ x(1) \\ x(2) \\ x(3) \end{bmatrix}, \qquad w = e^{-j\frac{2\pi}{4}}$$

a. 周波数間引き（行の入替え）により，上式を変形せよ．

$$\begin{bmatrix} X(0) \\ X(2) \\ X(1) \\ X(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w^0 & w^0 & w^0 & w^0 \\ w^0 & w^2 & w^0 & w^2 \\ w^0 & w^1 & w^2 & w^3 \\ w^0 & w^3 & w^2 & w^1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(0) \\ x(1) \\ x(2) \\ x(3) \end{bmatrix}$$

b. 設問aにより得られる行列を次のように表すとき，

$$\begin{bmatrix} F_1(2) & F_2(2) \\ F_3(2) & F_4(2) \end{bmatrix}$$

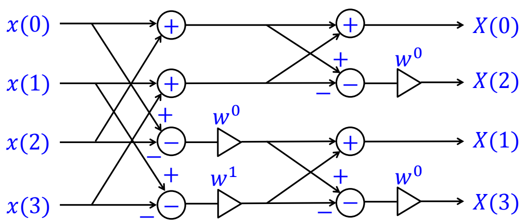
$F_1(2)$と$F_2(2)$, $F_3(2)$と $F_4(2)$, $F_1(2)$と$F_3(2)$の関係を示せ

$$F_2(2) = F_1(2)$$
$$F_4(2) = -F_3(2)$$
$$F_3(2) = F_1(2)\begin{bmatrix} w^0 & 0 \\ 0 & w^1 \end{bmatrix}$$

c. 設問bで得られた関係を用いて，4サンプルDFTを計算するシグナルフローグラフを求めよ.

$$\begin{bmatrix} w^0 & w^0 \\ w^0 & w^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w^0 & 0 \\ 0 & w^0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

4サンプルDFTのシグナルフローグラフ



$$w = e^{-j\frac{2\pi}{4}}$$