平成28年度前期

ディジタル通信と信号処理

期末試験
問題と解答例（85点満点）
（火曜2限クラス）

2016.7.26

- 持ち込み自由
- コンピュータ，電卓の使用可（ネットワーク接続不可）
- 解答の数値は有効数字3桁（小数点以下は2桁まで）

＊問題用紙は持ち帰ってください＊

問題1（5点×10＝50点）

次の条件を満たすIIRフィルタを①～③の手順に従って設計し，周波数特性④と時間応答⑤～⑨を解析せよ．

＜条件＞

- 周波数$f_1 = 1.8Hz$の成分を3倍する．
- 周波数$f_2 = 2.8Hz$の成分を阻止する．
- 標本化周波数 $f_s = 8Hz$

① 零点を求め，極形式で表せ．
極（大きさ$= 0.6$，周波数$= 2.2Hz$）を極形式で表せ．

零点の大きさ$= 1$（f_2の成分を阻止するため）
周波数$= f_2 = 2.8Hz$

零点の極形式表示　$1 \cdot e^{\pm j2\pi \times \frac{2.8}{8}} = e^{\pm j0.7\pi}$

極の極形式表示　$0.6e^{\pm j2\pi \times \frac{2.2}{8}} = 0.6e^{\pm j0.55\pi}$

② 次頁に示す伝達関数$H(z)$を求めよ．関数の形で示し，係数は数値とする．スケーリング係数は$h_0 = 1$とする．

$$H(z) = \frac{1 + 1.174z^{-1} + z^{-2}}{1 + 0.187z^{-1} + 0.36z^{-2}}$$

$$H(z) = h_0 \frac{a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}}{1 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}$$

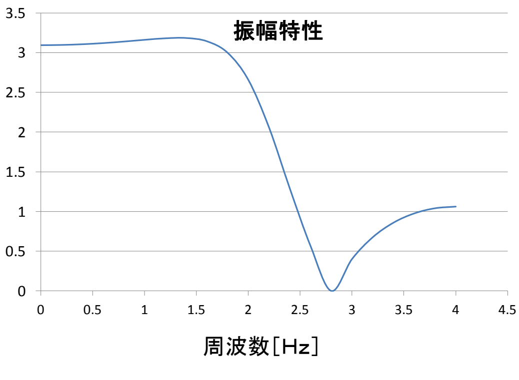
③ f_1における振幅特性が3となるようにh_0を決めよ．

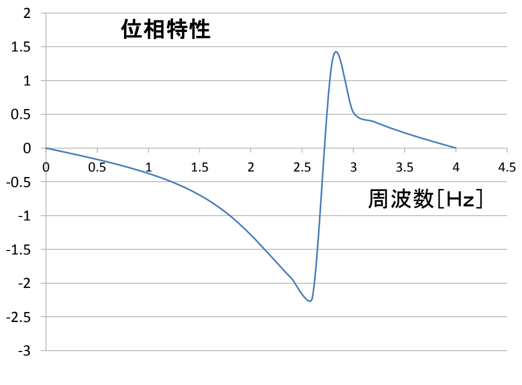
$f_1 = 1.8Hz$における振幅が1.989であるから

$$h_0 = \frac{3}{1.989} = 1.508$$

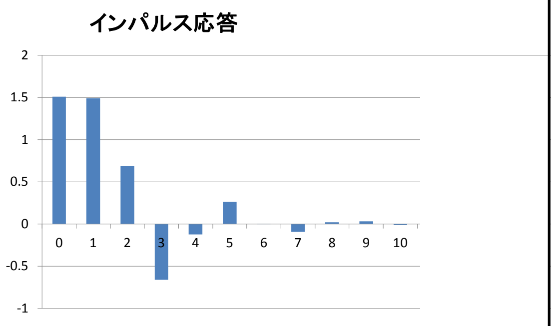
④ IIRフィルタの（a）振幅特性と（b）位相特性の概略図を図示せよ．④～⑩では③で求めたh_0を用いること．

次頁に示す．





⑤ IIRフィルタのインパルス応答$h(n)$を求めて，$n = 0 \sim 10$について概略図を示せ．



⑥ IIRフィルタに次の信号$x(n)$を入力したときの出力信号$y(n)$を$n = 0 \sim 4, 16 \sim 20$について求めよ（数値で示す）．

$$x(n) = 2\cos(2\pi f_1 nT)$$

n	$y(n)$	n	$y(n)$
0	3.02	16	− 5.55
1	3.45	17	− 3.12
2	− 1.02	18	4.57
3	− 5.32	19	4.56
4	− 0.68	20	− 3.14

⑦ IIRフィルタのf_1における振幅特性H_1と位相特性θ_1を用いて，次式により出力信号を$n = 0 \sim 4, 16 \sim 20$について求めよ（数値で示す）．

$$y(n) = H_1 \times 2\cos(2\pi f_1 nT + \theta_1)$$

$$H_1 = 3, \qquad \theta_1 = -1.01\ [rad]$$

n	$y(n)$	n	$y(n)$
0	3.19	16	− 5.54
1	5.52	17	− 3.14
2	− 1.46	18	4.56
3	− 5.98	19	4.57
4	− 0.42	20	− 3.12

⑧ ⑥と⑦の$y(n)$を比較し，その違いについて述べよ．

⑧ ⑥はIIRフィルタの回路を用いて$y(n)$を計算しており，過渡応答($n = 0 \sim 4$)＋定常応答($n = 16 \sim 20$)からなる．⑦はIIRフィルタの振幅特性と位相特性を用いて$y(n)$を計算しているので，定常応答($n = 0 \sim 4, 16 \sim 20$)のみである．従って，以下のようになる

⑥$y(0) \sim y(4)$[過渡応答] ≠ ⑦$y(0) \sim y(4)$[定常応答]
⑥$y(16) \sim y(20)$[定常応答] = ⑦$y(16) \sim y(20)$[定常応答]

⑨ IIRフィルタに次の信号$x(n)$を入力したときの出力信号$y(n)$を$n = 0 \sim 4, 16 \sim 20$について求めよ（数値で示す）．

$$x(n) = 2\cos(2\pi f_1 nT) + \cos(2\pi f_2 nT)$$

n	$y(n)$	n	$y(n)$
0	4.52	16	− 5.55
1	4.05	17	− 3.12
2	− 1.68	18	4.57
3	− 5.41	19	4.56
4	− 0.43	20	− 3.14

⑩ ⑥と⑨の$y(n)$を比較し，その違いについて述べよ．

⑥と⑨は両方ともIIRフィルタの回路を用いて$y(n)$を計算しているので，過渡応答($n = 0 \sim 4$)＋定常応答($n = 16 \sim 20$)である．
⑥の入力信号$x(n)$はf_1成分のみ含み，⑨の$x(n)$はf_1成分とf_2成分を含む．f_2成分は過渡応答では残っており，定常応答では阻止されてなくなっている．

過渡応答では，⑥の$y(n)$[f_1成分] ≠⑨の$y(n)$[f_1, f_2成分]
定常応答では，⑥の$y(n)$[f_1成分] =⑨の$y(n)$[f_1成分]

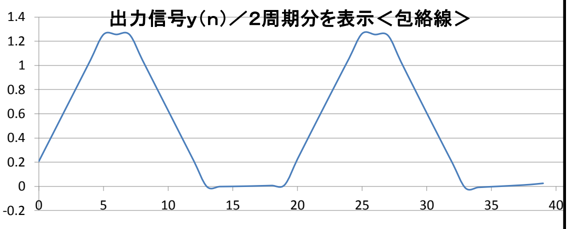
問題2（5点×4＝20点）

① インパルス応答が9サンプル，入力信号が16サンプルであり，DFT／IDFTのサンプル数がN＝20であるとき，何サンプルの折り返し歪みが発生するか．

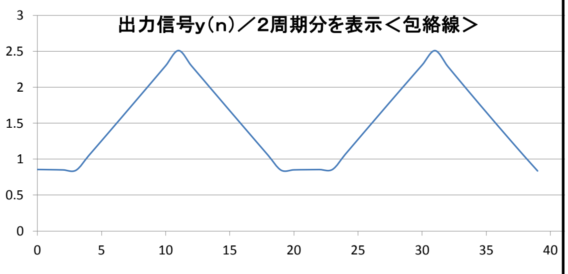
線形畳み込み和のサンプル数$= 9 + 16 - 1 = 24$であるから，$n = 0 \sim 23$に分布する．DFT／IDFTの周期は20サンプルであるから，$n = 0 \sim 19$が最初の周期，$n = 20 \sim 39$が次の周期である．従って，$n = 20 \sim 23$に重なり生じる事になる．

折り返し歪みのサンプル数＝4サンプル

② $x(n) = 0.7, n = 0 \sim 5$，$h(n) = 0.3, n = 0 \sim 7$（これら以外の$x(n), h(n)$は零である）に対する$y(n)$を求め，その概略図（包絡線）を$n = 0 \sim 39$の範囲で図示せよ．但し，DFTのサンプル数はN＝20．



③ $x(n) = 0.5, n = 0 \sim 11$，$h(n) = 0.7, n = 0 \sim 11$に対する$y(n)$を求めてその概略図（包絡線）を$n = 0 \sim 39$の範囲で図示せよ．但し，DFTのサンプル数はN＝20



④ ②と③における$y(n)$の違いについて述べよ．

線形畳み込み和のサンプル数とDFTのサンプル数の関係に基づいて解析する．

② $6 + 8 - 1 = 13 < 20$
折り返し歪みが発生しないので，1周期内の$y(n)$は線形畳み込み和（三角波形）と同じである．
（最大値$= 0.7 \times 0.3 \times 6$サンプル（＊）$= 1.26$）
（＊）$x(n)$と$h(n)$が重なるサンプル数（最大）$= 6$
③ $12 + 12 - 1 = 23 > 20$
3サンプルの折り返し歪み($n = 20 \sim 22$)が発生しているので，1周期内の$y(n)$は線形畳み込み和（三角波形）とは同じではない．
（最大値$= 0.7 \times 0.3 \times 12$サンプル $= 2.52$）

問題3（5点×3＝15点）
（教科書　第4章　pp.90〜92参照）

サンプル数：$N = 8$の離散フーリエ変換（DFT）において，
$\boldsymbol{x} = [x(0), x(1), \ldots, x(7)]^T$を標本化された信号，
$\boldsymbol{X} = [X(0), X(1), \ldots, X(7)]^T$をそのDFTとし，次のように表されるものとする．

$$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{F}\boldsymbol{x}$$

$\boldsymbol{F}$の偶数番目の行を上半分に奇数番目の行を下半分に入れ替えた行列を

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{F}_1(4) & \boldsymbol{F}_2(4) \\ \boldsymbol{F}_3(4) & \boldsymbol{F}_4(4) \end{bmatrix}$$

とするとき，以下の問に答えよ（結果のみでよい）．

① $\boldsymbol{F}_1(4)$と$\boldsymbol{F}_2(4)$の関係を求めよ．

$$\boldsymbol{F}_2(4) = \boldsymbol{F}_1(4)$$

② $\boldsymbol{F}_3(4)$と$\boldsymbol{F}_4(4)$の関係を求めよ．

$$\boldsymbol{F}_4(4) = -\boldsymbol{F}_3(4)$$

③ $\boldsymbol{F}_3(4) = \boldsymbol{F}_1(4)\boldsymbol{D}(4)$と表したときの$\boldsymbol{D}(4)$を$w = e^{-\frac{j2\pi}{N}}$を用いて表せ($N = 8$)．

$$\boldsymbol{D}(4) = \begin{bmatrix} w^0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & w^1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & w^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & w^3 \end{bmatrix}$$

（補足1）

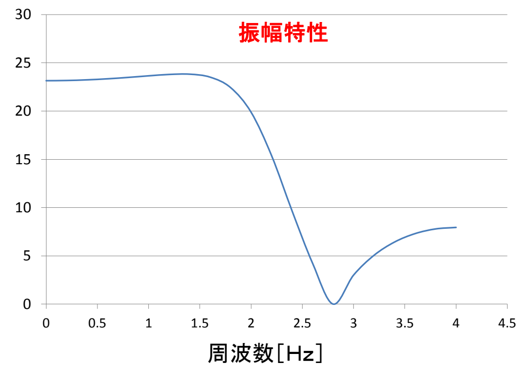
③ f_1における振幅特性が3となるようにh_0を決めよ.

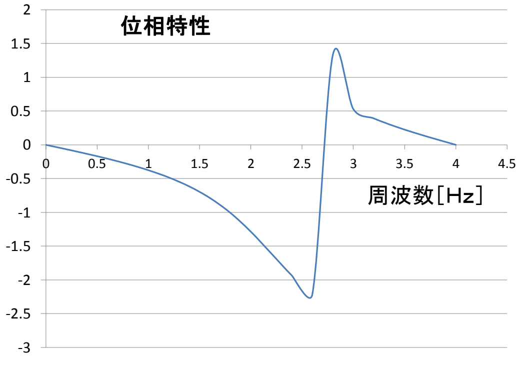
$f_1=3Hz$における振幅が0.266であるから

$$h_0=\frac{3}{0.266}=11.28$$

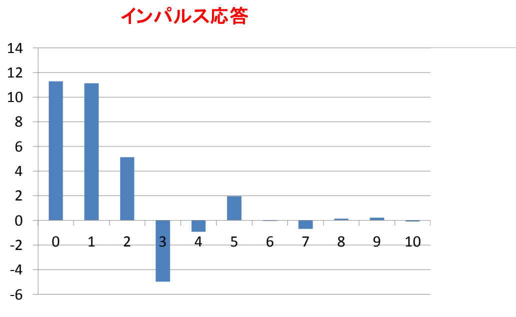
④ IIRフィルタの（a）振幅特性と（b）位相特性の概略図を図示せよ. ④～⑩では③で求めたh_0を用いること.

次頁に示す.





⑤ IIRフィルタのインパルス応答$h(n)$を求めて, $n=0\sim10$について概略図を示せ.



⑥ IIRフィルタに次の信号$x(n)$を入力したときの出力信号$y(n)$を$n=0\sim4, 16\sim20$について求めよ（数値で示す）.

$$x(n)=2\cos(2\pi f_1 nT)$$

n	$y(n)$	n	$y(n)$
0	22.56	16	-41.5
1	25.81	17	-23.3
2	-7.67	18	34.2
3	-39.8	19	34.1
4	-5.12	20	-23.5

⑦ IIRフィルタのf_1における振幅特性H_1と位相特性θ_1を用いて, 次式により出力信号を$n=0\sim4, 16\sim20$について求めよ（数値で示す）.

$$y(n)=H_1\times2\cos(2\pi f_1 nT+\theta_1)$$

$H_1=22.43,\quad \theta_1=-1.01\ [rad]$

n	$y(n)$	n	$y(n)$
0	23.9	16	-41.4
1	41.3	17	-23.5
2	-10.9	18	34.1
3	-44.7	19	34.2
4	-3.16	20	-23.3

⑨ IIRフィルタに次の信号$x(n)$を入力したときの出力信号$y(n)$を$n = 0 \sim 4, 16 \sim 20$について求めよ(数値で示す).

$$x(n) = 2\cos(2\pi f_1 nT) + \cos(2\pi f_2 nT)$$

n	$y(n)$	n	$y(n)$
0	33.8	16	− 41.5
1	30.3	17	− 23.3
2	− 12.6	18	34.2
3	− 40.5	19	34.1
4	− 3.22	20	− 23.5

(補足2)

⑥ IIRフィルタに次の信号$x(n)$を入力したときの出力信号$y(n)$を$n = 0 \sim 4, 16 \sim 20$について求めよ(数値で示す).

$$x(n) = 2\cos(2\pi f_1 nT)$$

$$f_1 = 2Hz$$

n	$y(n)$	n	$y(n)$
0	22.56	16	10.7
1	22.29	17	38.3
2	− 12.3	18	− 10.6
3	− 32.3	19	− 38.3
4	10.37	20	10.58

⑦ IIRフィルタのf_1における振幅特性H_1と位相特性θ_1を用いて，次式により出力信号を$n = 0 \sim 4, 16 \sim 20$について求めよ(数値で示す).

$$y(n) = H_1 \times 2\cos(2\pi f_1 nT + \theta_1)$$

$$f_1 = 2Hz$$

$$H_1 = 22.43, \qquad \theta_1 = -1.01\ [rad]$$

n	$y(n)$	n	$y(n)$
0	11.02	16	10.5
1	38.2	17	38.3
2	− 11	18	− 10.47
3	− 38.2	19	− 38.4
4	10.9	20	10.4

⑨ IIRフィルタに次の信号$x(n)$を入力したときの出力信号$y(n)$を$n = 0 \sim 4, 16 \sim 20$について求めよ(数値で示す).

$$x(n) = 2\cos(2\pi f_1 nT) + \cos(2\pi f_2 nT)$$

$$f_1 = 2Hz, \qquad f_2 = 2.8Hz$$

n	$y(n)$	n	$y(n)$
0	33.8	16	10.7
1	26.8	17	38.3
2	− 17.2	18	− 10.6
3	− 33	19	− 38.3
4	12.3	20	10.6

成績集計

レポート1		レポート2		中間 64	期末 85	総合	合否
A	4.5	A+	5	52	55	81.8	○
	a_1		a_2	b	c	x	再試 ×

$$x = (a_1 + a_2) \times \frac{15}{5} + b \times \frac{30}{64} + c \times \frac{40}{85} + \alpha$$

A+	5	B+	4	C	3
A	4.5	B	3.75		
A−	4.25	B−	3.5		