

平成28年度後期
工学部・情報工学科

情報理論

講義資料－3章－
情報量とエントロピー
＜演習問題と解答例＞

中山 謙二

1

問題1

ある都市の5月8日のお天気の生起確率が次に与えられるとき、平均情報量を求めよ。

$$p(\text{晴}) = \frac{1}{2}, p(\text{雨}) = \frac{1}{4}, p(\text{曇}) = \frac{1}{8}, p(\text{雪}) = \frac{1}{8}$$

2

＜解答例＞

上記の生起確率を平均情報量の式に代入する。

$$\begin{aligned} H(A) &= - \sum_{i=1}^4 p_i \log_2 p_i \\ &= -\frac{1}{2} \log_2 \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \log_2 \frac{1}{4} - \frac{1}{8} \log_2 \frac{1}{8} - \frac{1}{8} \log_2 \frac{1}{8} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{3}{8} + \frac{3}{8} = 1.75 \quad [\text{bit}] \end{aligned}$$

3

問題2

ある壺の中に赤玉が4個、青玉が2個、白玉が2個入っている。この壺から1個の玉を取り出すときのエントロピー（平均情報量）を求めよ。

4

＜解答例＞

赤玉を取り出す確率： $p_1 = 4/8 = 1/2$
青玉を取り出す確率： $p_2 = 2/8 = 1/4$
白玉を取り出す確率： $p_3 = 2/8 = 1/4$
これらをエントロピーの式に代入する。

$$\begin{aligned} H(A) &= - \sum_{i=1}^3 p_i \log_2 p_i \\ &= -\frac{1}{2} \log_2 \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \log_2 \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \log_2 \frac{1}{4} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.5 \quad [\text{bit}] \end{aligned}$$

5

問題3

A君が卒業できる確率は75%、B君が卒業できる確率は50%である。結合エントロピーを求めよ。

6

<解答例>

事象 a_1 : A君が卒業できる $p_{a1} = 0.75$
 事象 a_2 : A君が卒業できない $p_{a2} = 0.25$
 事象 b_1 : B君が卒業できる $p_{b1} = 0.5$
 事象 b_2 : B君が卒業できない $p_{b2} = 0.5$

結合事象の確率

$$\begin{aligned}(a_1, b_1) &\rightarrow p_{11} = 0.75 \times 0.5 = \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{8} \\(a_1, b_2) &\rightarrow p_{12} = 0.75 \times 0.5 = \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{8} \\(a_2, b_1) &\rightarrow p_{21} = 0.25 \times 0.5 = \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8} \\(a_2, b_2) &\rightarrow p_{22} = 0.25 \times 0.5 = \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}\end{aligned}$$

7

これらの確率を結合エントロピーの式に代入する。

$$\begin{aligned}H(A) &= - \sum_{i,j=1}^2 p_{ij} \log_2 p_{ij} \\&= -\frac{3}{8} \log_2 \frac{3}{8} - \frac{3}{8} \log_2 \frac{3}{8} - \frac{1}{8} \log_2 \frac{1}{8} - \frac{1}{8} \log_2 \frac{1}{8} \\&= 3 - \frac{3}{4} \log_2 3 = 1.81 \quad [bit]\end{aligned}$$

8

問題4

二つのサイコロを振ったとき、その目の和が7であり、サイコロの目も分かっていた。しかし、後日、そのサイコロの目を忘れてしまった。このとき失われた情報量(ビット)を求めよ。

(ヒント)

二つのサイコロの目を知っていたときと忘れたときの自己情報量(ビット)を求め、さらに、それらの差(失われた情報量)を求めよ。

9

<解答例>

事象A: 目の和が7であり、目の組合せも分かっている。
 事象B: 目の和が7であるが目の組合せは分かっていない

事象Aの確率: 全ての目の組合せは $6 \times 6 = 36$ 通りであり、その中の一つの組合せの確率は $1/36$ 。

事象Bの確率: 目の和が7である組合せは(1,6), (2,5), (3,4), (4,3), (5,2), (6,1)の6通りであるから、確率は $6/36 = 1/6$ 。

これらに対する自己情報量を求める。

$$I(A) = -\log_2 \frac{1}{36} = 5.16, \quad I(B) = -\log_2 \frac{1}{6} = 2.58$$

失われた情報量

$$I(A) - I(B) = 5.76 - 2.58 = 2.58 \quad [bit]$$

10

問題5

二つのサイコロを同時に振ったときの目の和についてエントロピーを求めよ。

(ヒント)

目の和に対する確率を求め、エントロピーの式に代入する。

11

<解答例>

全ての目の組合せは $6 \times 6 = 36$ 通り。
 各目の和に対する組合せを求め、確率を計算する。

例えば、

目の和=2 $\rightarrow 1+1 \dots 1$ 通り \rightarrow 確率 = $1/36$

目の和=3 $\rightarrow 1+2, 2+1 \dots 2$ 通り \rightarrow 確率 = $2/36$

目の和=4 $\rightarrow 1+3, 2+2, 3+1 \dots 3$ 通り \rightarrow 確率 = $3/36$

これらの確率をエントロピーの式に代入する。

$$-\frac{1}{36} \log_2 \frac{1}{36} - \frac{2}{36} \log_2 \frac{2}{36} - \frac{3}{36} \log_2 \frac{3}{36} \dots = 3.27 \quad [bit]$$

12