

情報理論

試験問題と解答例(55点満点)
(火曜3限クラス)

2015.1.27(火)

(注意事項)

- 教科書、資料等の持ち込み不可。電卓専用機使用可。
- 対数については電卓で計算するか、問題に付記された数値を使用すること。
- 解答は分数または小数(有効数字3桁)で示すこと。
- 試験終了後に問題用紙を回収します。

$$H(A) = - \sum_{x=S,A,B,C} p(x) \log_2 p(x)$$

$$= -\frac{1}{4} \log_2 \frac{1}{4} - \frac{1}{5} \log_2 \frac{1}{5} - \frac{3}{10} \log_2 \frac{3}{10} - \frac{1}{4} \log_2 \frac{1}{4}$$

$$= 1.99 \text{ [bit]}$$

$$H(B) = - \sum_{x=S,A,B,C} p(x) \log_2 p(x)$$

$$= -\frac{1}{20} \log_2 \frac{1}{20} - \frac{1}{2} \log_2 \frac{1}{2} - \frac{7}{20} \log_2 \frac{7}{20} - \frac{1}{10} \log_2 \frac{1}{10}$$

$$= 1.58 \text{ [bit]}$$

A君の成績のほうがB君の成績よりもエントロピーが高い。

問題1(5点×2題=10点)

2人の学生の20科目の成績を以下に示す。2人の成績のエントロピー $H(A), H(B)$ を求めよ。さらに、2人のエントロピーの値の違いについて考察せよ(エントロピーの意味と成績分布に基づいて違いを説明する)

成績	S	A	B	C
A君	5	4	6	5
B君	1	10	7	2

(参考)

$$\log_2 3 = 1.58, \quad \log_2 5 = 2.32, \quad \log_2 7 = 2.81$$

<エントロピーの違いの説明>

エントロピーは曖昧(不確実)さを表している。従って、エントロピーが高いほど、予測や推定が難しい。

A君の成績はS~Cがほぼ同じであり、ある科目の成績を推定(予測)することが難しいので、曖昧さが大きいと言える。一方、Bの成績はA, Bに集中しており、ある科目の成績はAまたはBであると推定できるので、曖昧さが小さいと言える。

<解答例>

A君の成績の確率

$$p(S) = \frac{5}{20} = \frac{1}{4}, \quad p(A) = \frac{4}{20} = \frac{1}{5}$$

$$p(B) = \frac{6}{20} = \frac{3}{10}, \quad p(C) = \frac{5}{20} = \frac{1}{4}$$

B君の成績の確率

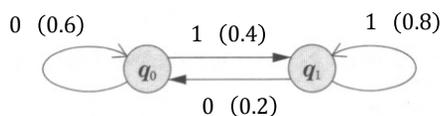
$$p(S) = \frac{1}{20}, \quad p(A) = \frac{10}{20} = \frac{1}{2}$$

$$p(B) = \frac{7}{20}, \quad p(C) = \frac{2}{20} = \frac{1}{10}$$

これらの確率をエントロピーの式に代入する。

問題2(5点×2題=10点)

次に示す2元の1重マルコフ情報源について、以下の間に答えよ。



- (1)各状態の定常確率 $P(q_0), P(q_1)$ を求めよ。
- (2)情報源のエントロピーを求めよ。

(参考)エントロピー関数の数値例

$$H(0.1) = 0.469, H(0.2) = 0.722, H(0.3) = 0.881$$

$$H(0.4) = 0.971, H(0.5) = 1.0$$

<解答例>

$$P(q_0) + P(q_1) = 1 \dots (1)$$

$$P(q_0) = 0.6P(q_0) + 0.2P(q_1) \dots (2)$$

$$P(q_1) = 0.4P(q_0) + 0.8P(q_1) \dots (3)$$

式(2), (3)は等価. 式(1)と式(2)または(3)を連立させて, 方程式を解き, 各状態の定常確率が求まる.

$$P(q_0) = \frac{1}{3}, \quad P(q_1) = \frac{2}{3}$$

<解答例> 以下に示す式表現以外も可能である.

(1)

$$c_1 = x_1 \oplus x_2$$

$$c_2 = x_2 \oplus x_3$$

$$c_3 = x_1 \oplus x_3$$

(2)

$$s_1 = x_1 \oplus x_2 \oplus c_1$$

$$s_2 = x_2 \oplus x_3 \oplus c_2$$

$$s_3 = x_1 \oplus x_3 \oplus c_3$$

状態 q_0 のとき: 0, 1を確率 $p = 0.6, 1 - p = 0.4$ で発生
→エントロピー: $H(p = 0.6) = H(p = 0.4) = 0.971$

状態 q_1 のとき: 0, 1を確率 $p = 0.2, 1 - p = 0.8$ で発生
→エントロピー: $H(p = 0.8) = H(p = 0.2) = 0.722$

情報源全体のエントロピー

$$\begin{aligned} H(S) &= P(q_0)H(0.4) + P(q_1)H(0.2) \\ &= \frac{1}{3} \times 0.971 + \frac{2}{3} \times 0.722 = 0.805 \text{ [bit]} \end{aligned}$$

(3)

誤りビット	シンドローム		
	s_1	s_2	s_3
x_1	1	0	1
x_2	1	1	0
x_3	0	1	1
c_1	1	0	0
c_2	0	1	0
c_3	0	0	1

問題3(3点×5題=15点)

ハミング符号について以下の問に答えよ.

$n = 6, k = 3$ とし, 情報ビットを $x_1 \sim x_3$, 検査ビットを $c_1 \sim c_3$ とする. 符号語を $\mathbf{w} = (x_1, x_2, x_3, c_1, c_2, c_3)$ とする.

- (1) $c_1 \sim c_3$ を $x_1 \sim x_3$ の排他的論理和で表せ.
- (2) $s_1 \sim s_3$ を $x_1 \sim x_3, c_1 \sim c_3$ の排他的論理和で表せ.
- (3) $\mathbf{w} = (x_1, x_2, x_3, c_1, c_2, c_3)$ において, 誤りが生じているビットとそれに対するシンドローム(s_1, s_2, s_3)を求めよ.
- (4) 情報ビット(x_1, x_2, x_3) = (1, 0, 1)に対する符号語 $\mathbf{w} = (x_1, x_2, x_3, c_1, c_2, c_3)$ を求めよ.
- (5) (1, 0, 0, 1, 1, 0)を受信した. 誤り検出を行い, 誤りがあれば訂正した符号を示せ.

(4)

$$c_1 = x_1 \oplus x_2 = 1 \oplus 0 = 1$$

$$c_2 = x_2 \oplus x_3 = 0 \oplus 1 = 1$$

$$c_3 = x_1 \oplus x_3 = 1 \oplus 1 = 0$$

$$\begin{aligned} \mathbf{w} &= (x_1, x_2, x_3, c_1, c_2, c_3) \\ &= (1, 0, 1, 1, 1, 0) \end{aligned}$$

(5) $\mathbf{w} = (x_1, x_2, x_3, c_1, c_2, c_3) = (1, 0, 0, 1, 1, 0)$

$$s_1 = x_1 \oplus x_2 \oplus c_1 = 1 \oplus 0 \oplus 1 = 0$$

$$s_2 = x_2 \oplus x_3 \oplus c_2 = 0 \oplus 0 \oplus 1 = 1$$

$$s_3 = x_1 \oplus x_3 \oplus c_3 = 1 \oplus 0 \oplus 0 = 1$$

(s_1, s_2, s_3) = (0, 1, 1)であるから, (3)の結果より x_3 に誤りがある. x_3 を0 → 1に訂正する.

訂正→ $\mathbf{w} = (1, 0, 1, 1, 1, 0)$

問題4(5点×2題=10点)

巡回符号に関して以下の問に答えよ。但し、 $n = 7, k = 4, G(x) = x^3 + x + 1$ とする。

以下に示す情報ビット $(a), (b)$ に対する符号語を求めよ。但し、次の手順で計算し、その計算過程も示すこと。

$$p(x) \rightarrow x^3 p(x) \rightarrow G(x) \text{で割る} \rightarrow R(x) \rightarrow F(x)$$

(a) $(d_3 d_2 d_1 d_0) = (1010)$

(b) $(d_3 d_2 d_1 d_0) = (1100)$

<解答例>

(a)

受信符号の多項式: $F'(x) = x^5 + x^4 + x^3 + x$
 $G(x) = x^3 + x + 1$ で割ったときの余り $E(x) = e_2 x^2 + e_1 x + e_0$ を計算する。その結果、 $E(x) = 0$ となり、割り切れることが分かる。従って、受信符号(0111010)に誤りは無い。(割り算の計算式が必要)

(b)

受信符号の多項式: $F'(x) = x^6 + x^5 + x^4 + x$
 $G(x) = x^3 + x + 1$ で割ったときの余り $E(x) = x^2 + x$ となり、受信符号(1110010)に誤りがある。 $(e_2, e_1, e_0) = (110)$ であるから、表より、 d_1 に誤りがある。従って、訂正後の符号は(1100010)となる。(割り算の計算式が必要)

<解答例>

(a) $(d_3 d_2 d_1 d_0) = (1010)$

$$p(x) = x^3 + x \rightarrow x^3 p(x) = x^6 + x^4$$

$$\rightarrow G(x) = x^3 + x + 1 \text{で割る} \rightarrow \text{余り} R(x) = x + 1$$

$$\rightarrow F(x) = x^3 p(x) + R(x) = x^6 + x^4 + x + 1$$

$$\rightarrow \mathbf{w} = (1010011)$$

(割り算の計算式が必要)

(b) $(d_3 d_2 d_1 d_0) = (1100)$

$$p(x) = x^3 + x^2 \rightarrow x^3 p(x) = x^6 + x^5$$

$$\rightarrow G(x) = x^3 + x + 1 \text{で割る} \rightarrow \text{余り} R(x) = x$$

$$\rightarrow F(x) = x^3 p(x) + R(x) = x^6 + x^5 + x$$

$$\rightarrow \mathbf{w} = (1100010)$$

(割り算の計算式が必要)

問題5(5点×2題=10点)

巡回符号に関して以下の問に答えよ。但し、 $n = 7, k = 4, G(x) = x^3 + x + 1$ とする。

受信側で以下に示す符号語 $(a), (b)$ を受信した。誤り(1bit)を含むかどうか調べよ。また、誤りがある場合はどのビットが誤っているか調べ、訂正後の符号を示せ。

(受信符号多項式 $F'(x)$ を $G(x)$ で割る計算を示すこと)

(a) $(d_3 d_2 d_1 d_0 c_2 c_1 c_0) = (0111010)$

(b) $(d_3 d_2 d_1 d_0 c_2 c_1 c_0) = (1110010)$

(参考)

誤りビット	e_2	e_1	e_0	誤りビット	e_2	e_1	e_0
d_3	1	0	1	d_0	0	1	1
d_2	1	1	1	c_2	1	0	0
d_1	1	1	0	c_1	0	1	0
				c_0	0	0	1