平成26年度後期　工学部・情報工学科

情報理論

試験問題と解答例（55点満点）
（火曜4限クラス）

2015.1.27（火）

（注意事項）
- 教科書，資料等の持ち込み不可．電卓専用機使用可．
- 対数については電卓で計算するか，問題に付記された数値を使用すること．
- 解答は分数または小数（有効数字3桁）で示すこと．
- 問題用紙は回収しません．

$$H(A) = -\sum_{x=S,A,B,C} p(x)\log_2 p(x)$$
$$= -\frac{1}{4}\log_2\frac{1}{4} - \frac{3}{10}\log_2\frac{3}{10} - \frac{1}{5}\log_2\frac{1}{5} - \frac{1}{4}\log_2\frac{1}{4}$$
$$= 1.99 \quad [bit]$$
$$H(B) = -\sum_{x=S,A,B,C} p(x)\log_2 p(x)$$
$$= -\frac{1}{10}\log_2\frac{1}{10} - \frac{1}{2}\log_2\frac{1}{2} - \frac{3}{10}\log_2\frac{3}{10} - \frac{1}{10}\log_2\frac{1}{10}$$
$$= 1.69 \quad [bit]$$

A君の成績のほうがB君の成績よりもエントロピーが高い．

問題1（5点×2題＝10点）

2人の学生の20科目の成績を以下に示す．2人の成績のエントロピー$H(A), H(B)$を求めよ．さらに，2人のエントロピーの値の違いについて考察せよ（エントロピーの意味と成績分布に基づいて違いを説明する）

成績	S	A	B	C
A君	5	6	4	5
B君	2	10	6	2

（参考）
$\log_2 3 = 1.58,\quad \log_2 5 = 2.32,\quad \log_2 7 = 2.81$

＜エントロピーの違いの説明＞

エントロピーは曖昧（不確実）さを表している．従って，エントロピーが高いほど，予測や推定が難しい．

A君の成績はS～Cがほぼ同じであり，ある科目の成績を推定（予測）することが難しいので，曖昧さが大きいと言える．一方，Bの成績はA，Bに集中しており，ある科目の成績はAまたはBであると推定できるので，曖昧さが小さいと言える．

＜解答例＞

A君の成績の確率
$$p(S) = \frac{5}{20} = \frac{1}{4}, \qquad p(A) = \frac{6}{20} = \frac{3}{10}$$
$$p(B) = \frac{4}{20} = \frac{1}{5}, \qquad p(C) = \frac{5}{20} = \frac{1}{4}$$
B君の成績の確率
$$p(S) = \frac{2}{20} = \frac{1}{10}, \qquad p(A) = \frac{10}{20} = \frac{1}{2}$$
$$p(B) = \frac{6}{20} = \frac{3}{10}, \qquad p(C) = \frac{2}{20} = \frac{1}{10}$$

これらの確率をエントロピーの式に代入する．

問題2（4点＋3点×2題＝10点）

2元対称通信路の伝送情報量は次式で与えられる．

$$I(A;B) = H\big(p\varepsilon + (1-p)(1-\varepsilon)\big) - H(\varepsilon) \quad [bit/\text{記号}]$$

以下の問に答えよ．
（1）$p = 1/2$のときの$I(A;B)$を求めよ．
（2）$I(A;B)$の最大値とそのときのεを求めよ．さらに，最大値とεの関係を定性的に説明せよ．
（3）$I(A;B)$の最小値とそのときのεを求めよ．さらに，最小値とεの関係を定性的に説明せよ．

＜解答例＞

（1）$p=1/2$のとき$p\varepsilon+(1-p)(1-\varepsilon)=1/2$となるから

$$I(A;B)=H(1/2)\ -H(\varepsilon)=1-H(\varepsilon)$$

（2）$I(A;B)=1-H(\varepsilon)$において，$0\leq H(\varepsilon)\leq 1$であるから，$H(\varepsilon)=0$のときに$I(A;B)$は最大値＝1となる.
$H(\varepsilon)=0$ となるのは$\varepsilon=0,1$のときである.

＜$I(A;B)$の最大値とεの関係＞
$\varepsilon=0(\varepsilon=1)$のときは，誤りなし（完全に誤る）なので，例えば，0を受信した場合は0（1）が送信されたと判断できる. 従って，送信記号が100%（$I(A;B)=1$）送られたことになる.

＜解答例＞以下に示す式表現以外も可能である.

（1）

$$c_1=x_1\oplus x_2$$
$$c_2=x_2\oplus x_3$$
$$c_3=x_1\oplus x_3$$

（2）

$$s_1=x_1\oplus x_2\oplus c_1$$
$$s_2=x_2\oplus x_3\oplus c_2$$
$$s_3=x_1\oplus x_3\oplus c_3$$

（3）$I(A;B)=1-H(\varepsilon)$において，$H(\varepsilon)$ =1のときに$I(A;B)$は最小値＝0となる. $H(\varepsilon)$ =1となるのは$\varepsilon=0.5$のときである.

＜$I(A;B)$の最小値とεの関係＞
$\varepsilon=0.5$のときは，例えば，0を送信すると同じ確率で0と1が受信される. 言い換えると0を受信しても，0が送信されたか，1が送信されたか全く不明である. すなわち，送信記号は全く送られていない（$I(A;B)=0$）ことになる.

（3）

誤りビット	シンドローム		
	s_1	s_2	s_3
x_1	1	0	1
x_2	1	1	0
x_3	0	1	1
c_1	1	0	0
c_2	0	1	0
c_3	0	0	1

問題3（3点×5題＝15点）

ハミング符号について以下の問に答えよ.
$n=6,k=3$とし，情報ビットを$x_1\sim x_3$，検査ビットを$c_1\sim c_3$とする. 符号語を$\boldsymbol{w}=(x_1,x_2,x_3,c_1,c_2,c_3)$とする.

（1）$c_1\sim c_3$を$x_1\sim x_3$の排他的論理和で表せ.
（2）$s_1\sim s_3$を$x_1\sim x_3,c_1\sim c_3$の排他的論理和で表せ.
（3）$\boldsymbol{w}=(x_1,x_2,x_3,c_1,c_2,c_3)$において，誤りが生じているビットとそれに対するシンドローム(s_1,s_2,s_3)を求めよ.
（4）情報ビット$(x_1,x_2,x_3)=(0,1,1)$に対する符号語$\boldsymbol{w}=(x_1,x_2,x_3,c_1,c_2,c_3)$を求めよ.
（5）$(0,0,1,1,0,1)$を受信した. 誤り検出を行い，誤りがあれば訂正した符号を示せ.

（4）

$$c_1=x_1\oplus x_2=0\oplus 1=1$$
$$c_2=x_2\oplus x_3=1\oplus 1=0$$
$$c_3=x_1\oplus x_3=0\oplus 1=1$$
$$\boldsymbol{w}=(x_1,x_2,x_3,c_1,c_2,c_3)$$
$$=(0,1,1,1,0,1)$$

（5）$\boldsymbol{w}=(x_1,x_2,x_3,c_1,c_2,c_3)=(0,0,1,1,0,1)$

$$s_1=x_1\oplus x_2\oplus c_1=0\oplus 0\oplus 1=1$$
$$s_2=x_2\oplus x_3\oplus c_2=0\oplus 1\oplus 0=1$$
$$s_3=x_1\oplus x_3\oplus c_3=0\oplus 1\oplus 1=0$$

$(s_1,s_2,s_3)=(1,1,0)$であるから，（3）の結果よりx_2に誤りがある. x_2を$0\rightarrow 1$に訂正する.
訂正→$\boldsymbol{w}=(0,1,1,1,0,1)$

問題4（5点×2題＝10点）

巡回符号に関して以下の問に答えよ．但し，$n = 7, k = 4, G(x) = x^3 + x + 1$とする．

以下に示す情報ビット$(a), (b)$に対する符号語を求めよ．
但し，次の手順で計算し，その計算過程も示すこと．

$p(x) \to x^3 p(x) \to G(x)$で割る$\to R(x) \to F(x)$

$(a)\ (d_3\ d_2\ d_1\ d_0) = (1\ 0\ 1\ 1)$
$(b)\ (d_3\ d_2\ d_1\ d_0) = (0\ 1\ 1\ 0)$

＜解答例＞

$(a)\ (d_3\ d_2\ d_1\ d_0) = (1\ 0\ 1\ 1)$
$p(x) = x^3 + x + 1 \to x^3 p(x) = x^6 + x^4 + x^3$
$\to G(x) = x^3 + x + 1$で割る→余り$R(x) = 0$
$\to F(x) = x^3 p(x) + R(x) = x^6 + x^4 + x^3$
$\to \boldsymbol{w} = (1\ 0\ 1\ 1\ 0\ 0\ 0)$
（割り算の計算が必要）

$(b)\ (d_3\ d_2\ d_1\ d_0) = (0\ 1\ 1\ 0)$
$p(x) = x^2 + x \to x^3 p(x) = x^5 + x^4$
$\to G(x) = x^3 + x + 1$で割る→余り$R(x) = 1$
$\to F(x) = x^3 p(x) + R(x) = x^5 + x^4 + 1$
$\to \boldsymbol{w} = (0\ 1\ 1\ 0\ 0\ 0\ 1)$
（割り算の計算が必要）

＜解答例＞
（a）
受信符号の多項式：$F'(x) = x^6 + x^3$を$G(x) = x^3 + x + 1$で割ったときの余り$E(x) = e_2 x^2 + e_1 x + e_0$を計算する．
その結果，$E(x) = x^2 + x$となり，受信符号$(1\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0)$に誤りがある．$(e_2, e_1, e_0) = (1\ 1\ 0)$であるから，表より，$d_1$に誤りがある．従って，訂正後の符号は$(1\ 0\ 1\ 1\ 0\ 0\ 0)$となる．（割り算の計算が必要）

（b）
受信符号の多項式：$F'(x) = x^5 + x^3 + x^2$を$G(x) = x^3 + x + 1$で割ったときの余りは零となり，受信符号$(0\ 1\ 0\ 1\ 1\ 0\ 0)$に誤りはない．（割り算の計算が必要）

問題5（5点×2題＝10点）
巡回符号に関して以下の問に答えよ．但し，$n = 7, k = 4, G(x) = x^3 + x + 1$とする．
受信側で以下に示す符号語$(a), (b)$を受信した．誤り（1bit）を含むかどうか調べよ．また，誤りがある場合はどのビットが誤っているか調べ，訂正後の符号を示せ．
（受信符号多項式$F'(x)$を$G(x)$で割る計算を示すこと）
$(a)\ (d_3\ d_2\ d_1\ d_0\ c_2\ c_1\ c_0) = (1\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0)$
$(b)\ (d_3\ d_2\ d_1\ d_0\ c_2\ c_1\ c_0) = (0\ 1\ 0\ 1\ 1\ 0\ 0)$

（参考）

誤りビット	e_2	e_1	e_0
d_3	1	0	1
d_2	1	1	1
d_1	1	1	0

誤りビット	e_2	e_1	e_0
d_0	0	1	1
c_2	1	0	0
c_1	0	1	0
c_0	0	0	1