

平成26年度後期
工学部・情報工学科

情報理論
第1回小テスト(火曜3限クラス)

(問題と解答例)

2014. 10. 21

1

問題1(10点満点)

中が見えない壺に同じ形状の2種類の色の玉(赤玉2個, 白玉4個)が入っている. この壺から1個ずつ順に合計4個の玉を取り出すとき, 2種類の色が交互に出てくる確率を求めよ.

<解答例>

[赤白赤白]の順に取り出される確率

$$\frac{2}{6} \times \frac{4}{5} \times \frac{1}{4} \times \frac{3}{3} = \frac{1}{15}$$

[白赤白赤]の順に取り出される確率

$$\frac{4}{6} \times \frac{2}{5} \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{15}$$

これら, 2通りが可能であるから, 全体の確率は和となる.

$$\text{全体の確率} = \frac{1}{15} + \frac{1}{15} = \frac{2}{15} \approx 0.133$$

2

問題2(10点満点)

二つのサイコロを振ったとき, その目の和が8であり, サイコロの目も分かっていた. 後日, そのサイコロの目を忘れてしまった. このとき失われた情報量(ビット)を求めよ.

<解答例>

①目の和が8であり, 目の組み合わせも分かっている(1通りである)事象

$$\text{確率: } p_1 = 1/36$$

$$\text{自己情報量: } I_1 = -\log_2 p_1 = 5.17 [\text{bit}]$$

②目の和が8であり, 目の組み合わせが不明である事象
目の和が8の組み合わせ=(2,6), (3,5), (4,4), (5,3), (6,2)

$$\text{確率: } p_2 = 5/36$$

$$\text{自己情報量: } I_2 = -\log_2 p_2 = 2.85 [\text{bit}]$$

$$\text{③失われた情報量: } I = I_1 - I_2 = 2.32 [\text{bit}]$$

5

問題3(10点満点)

A君が卒業できる確率は80%, B君が卒業できる確率は75%である. 結合エントロピーを求めよ.

<解答例>

事象 a_1 : A君が卒業できる $p_{a1} = 0.8$

事象 a_2 : A君が卒業できない $p_{a2} = 0.2$

事象 b_1 : B君が卒業できる $p_{b1} = 0.75$

事象 b_2 : B君が卒業できない $p_{b2} = 0.25$

7

結合事象の確率

$$(a_1, b_1) \rightarrow p_{11} = 0.8 \times 0.75 = \frac{8}{10} \times \frac{3}{4} = \frac{3}{5}$$

$$(a_1, b_2) \rightarrow p_{12} = 0.8 \times 0.25 = \frac{8}{10} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{5}$$

$$(a_2, b_1) \rightarrow p_{21} = 0.2 \times 0.75 = \frac{2}{10} \times \frac{3}{4} = \frac{3}{20} = \frac{3}{4 \times 5}$$

$$(a_2, b_2) \rightarrow p_{22} = 0.2 \times 0.25 = \frac{2}{10} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{20}$$

これらの確率を結合エントロピーの式に代入する.

$$\begin{aligned} H(A) &= - \sum_{i,j=1}^2 p_{ij} \log_2 p_{ij} \\ &= -\frac{3}{5} \log_2 \frac{3}{5} - \frac{1}{5} \log_2 \frac{1}{5} - \frac{3}{20} \log_2 \frac{3}{20} - \frac{1}{20} \log_2 \frac{1}{20} \\ &= 1.53 [\text{bit}] \end{aligned}$$

8

問題4(10点満点)

2人の学生の20科目の成績を以下に示す. 2人の成績のエントロピー $H(A), H(B)$ を求めよ. さらに, 2人のエントロピーの値の違いについて考察せよ(エントロピーの意味と成績分布に基づいて違いを説明する)

成績	S	A	B	C
A君	4	5	5	6
B君	1	7	10	2

(参考)

$$\log_2 3 = 1.58, \quad \log_2 5 = 2.32, \quad \log_2 7 = 2.81$$

9

<解答例>

A君の成績の確率

$$p(S) = \frac{4}{20} = \frac{1}{5}, \quad p(A) = \frac{5}{20} = \frac{1}{4}$$

$$p(B) = \frac{5}{20} = \frac{1}{4}, \quad p(C) = \frac{6}{20} = \frac{3}{10}$$

B君の成績の確率

$$p(S) = \frac{1}{20}, \quad p(A) = \frac{7}{20}$$

$$p(B) = \frac{10}{20} = \frac{1}{2}, \quad p(C) = \frac{2}{20} = \frac{1}{10}$$

これらの確率をエントロピーの式に代入する。

10

$$H(A) = - \sum_{x=S,A,B,C} p(x) \log_2 p(x)$$

$$= -\frac{1}{5} \log_2 \frac{1}{5} - \frac{1}{4} \log_2 \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \log_2 \frac{1}{4} - \frac{3}{10} \log_2 \frac{3}{10}$$

$$= 1.99 \text{ [bit]}$$

$$H(B) = - \sum_{x=S,A,B,C} p(x) \log_2 p(x)$$

$$= -\frac{1}{20} \log_2 \frac{1}{20} - \frac{7}{20} \log_2 \frac{7}{20} - \frac{1}{2} \log_2 \frac{1}{2} - \frac{1}{10} \log_2 \frac{1}{10}$$

$$= 1.58 \text{ [bit]}$$

A君の成績のほうがB君の成績よりもエントロピーが高い。

11

<エントロピーの違いの説明>

エントロピーは曖昧(不確実)さを表している。従って、エントロピーが高いほど、予測や推定が難しい。

A君の成績はS~Cがほぼ同じであり、ある科目の成績を推定(予測)することが難しいので、曖昧さが大きいと言える。一方、Bの成績はA, Bに集中しており、ある科目の成績はAまたはBであると推定できるので、曖昧さが小さいと言える。

12