

情報理論  
第3回小テスト(木曜2限クラス)  
(問題と解答例/60点満点)

2016.12.22

(注意事項)

- 教科書、資料等の持ち込み不可。電卓専用機使用可。
- 対数については電卓で計算するか、問題に付記された数値を使用すること。
- 解答は分数または小数(有効数字3桁)で示すこと。  
<問題用紙は回収しません。持ち帰ってください>

1

問題1 (8点×2題=16点)

次の情報源について以下の問に答えよ。

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & A_3 & A_4 \\ 0.3 & 0.15 & 0.45 & 0.1 \end{pmatrix}$$

- シャノン-ファノ符号と効率 $e$ を求めよ。
- ハフマン符号と効率 $e$ を求めよ。

(参考)

$$\log_2 0.1 = -3.32, \quad \log_2 0.15 = -2.74$$

$$\log_2 0.3 = -1.74, \quad \log_2 0.45 = -1.15$$

2

<解答例>

(1)シャノン・ファノの符号化

確率の順に並べる

$$\begin{matrix} A_3 & A_1 & A_2 & A_4 \\ 0.45 & 0.3 & 0.15 & 0.1 \end{matrix}$$

確率が等しくなるように分割

$$\begin{matrix} (A_3) & (A_1 & A_2 & A_4) \\ 0.45 & 0.3 + 0.15 + 0.1 = 0.55 \end{matrix}$$

第2項を確率が等しくなるように分割

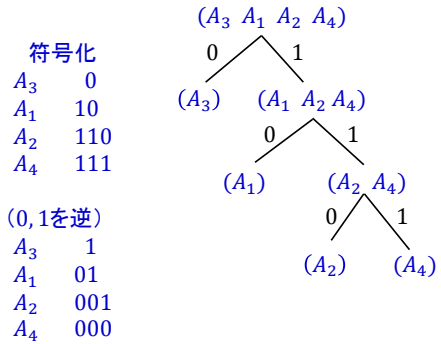
$$\begin{matrix} (A_1) & (A_2 & A_4) \\ 0.3 & 0.15 + 0.1 = 0.25 \end{matrix}$$

第3項を分割する。

$$\begin{matrix} (A_2) & (A_4) \\ 0.15 & 0.1 \end{matrix}$$

3

以上をツリーで表す。



4

効率

$$H = - \sum_{i=1}^4 p_i \log_2 p_i = 1.78$$

$$L = \sum_{i=1}^4 g_i p_i = 1.80, \quad g_i : \text{各記号の符号長}$$

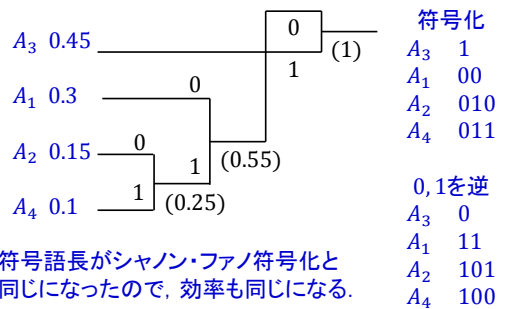
$$e = \frac{H}{L} = \frac{1.78}{1.80} \cong 0.990$$

効率 $e$ のミスは(1)のみで減点(-4点).  
 $H$ または $L$ が正しければ-2点.  
ハフマン符号が書かれていない場合は-8点.

5

(2)ハフマン符号(1)

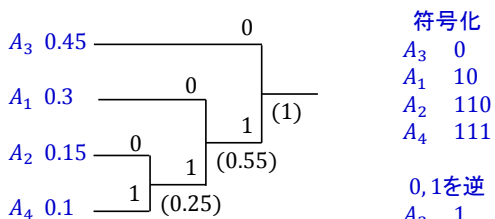
記号を確率の大きい順に並べる.  
確率が最も小さい2つを組み合わせる。



6

(2)ハフマン符号(2)

記号を確率の大きい順に並べる。  
確率が最も小さい2つを組み合わせる。



0,1を逆

|       |     |
|-------|-----|
| $A_3$ | 1   |
| $A_1$ | 01  |
| $A_2$ | 001 |
| $A_4$ | 000 |

符号(語長)がシャノン・ファノ符号化と同じになったので、効率も同じになる。

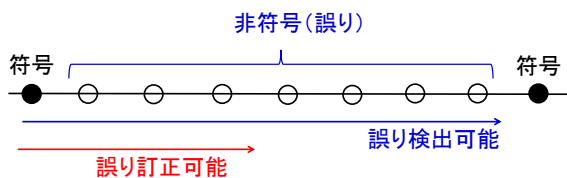
問題2(5点×2題=10点)

符号語間の最小のハミング距離が8である場合、

- (a)誤り検出可能
- (b)誤り訂正可能

なハミング距離(ビット数)を求めよ。

<解答例>



符号間最小距離=8ビット( $n = 2b, b = 4$ )

(a)誤り検出可能な距離=7ビット( $2b - 1$ )

(b)誤り訂正可能な距離=3ビット( $b - 1$ )

問題3(5点×2題=10点)

3ビット分の雑音が混入しても

- (a)誤り検出可能
- (b)誤り訂正可能

であるための符号語間の最小ハミング距離(奇数)を求めよ。

<解答例>

符号間の最小距離が奇数( $n$ )が奇数であるから、  
 $n = 2b + 1$

(a)誤り検出可能

$$2b = 3 \rightarrow b = \frac{3}{2} \rightarrow 2, \quad \text{最小距離} = 2b + 1 = 5$$

(b)誤り訂正可能

$$b = 3, \quad \text{最小距離} = 2b + 1 = 7$$

問題4(9点+5点=14点)

長方形符号が次式で与えられている。以下の間に答えよ。

$$Y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & p_1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & p_2 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & p_3 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & p_4 \\ q_1 & q_2 & q_3 & q_4 & q_5 \end{bmatrix}$$

(1) $p_1 \sim p_4, q_1 \sim q_5$ を求めよ。

(1,0を用いた排他的論理和を示せ)

(2)受信した符号 $Y'$ において、第4行が $[1 \ 1 \ 1 \ 0 \ p_4]$ となった。 $Y'$ における $y_1 \sim y_4, z_1 \sim z_5$ を求めよ。  
ただし、 $p_4$ に誤りはないものとする。

<解答例>

(1)  $p_i$ は第*i*行の情報ビット,  $q_j$ は第*j*列の情報ビット,  $q_5$ は  $p_1 \sim p_4$ の排他的論理和であるから, 次のように求める.

$$\begin{aligned} p_1 &= 1 \oplus 0 \oplus 1 \oplus 1 = 1 \\ p_2 &= 0 \oplus 1 \oplus 0 \oplus 1 = 0 \\ p_3 &= 1 \oplus 1 \oplus 0 \oplus 0 = 0 \\ p_4 &= 1 \oplus 0 \oplus 1 \oplus 0 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} q_1 &= 1 \oplus 0 \oplus 1 \oplus 1 = 1 \\ q_2 &= 0 \oplus 0 \oplus 1 \oplus 1 \oplus 0 = 0 \\ q_3 &= 1 \oplus 0 \oplus 0 \oplus 0 \oplus 1 = 0 \\ q_4 &= 1 \oplus 1 \oplus 0 \oplus 0 = 0 \\ q_5 &= 1 \oplus 0 \oplus 0 \oplus 0 = 1 \end{aligned}$$

排他的論理和が書かれていない場合は減点(-4点).

(2) 第4行を[1 1 1 0  $p_4$ ]で置き換える.

$$Y' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

上式において,  $y_1 \sim y_4, z_1 \sim z_5$ を計算する.

$$\begin{aligned} y_1 &= 0, y_2 = 0, y_3 = 0, y_4 = 1 \\ z_1 &= 0, z_2 = 1, z_3 = 0, z_4 = 0, z_5 = 0 \end{aligned}$$

ここでは, 排他的論理和を書く必要はない.

問題5

次に示す長さ15の符号語(情報ビット=10, 検査ビット=5)の三角形符号について以下の間に答えよ.

$$Y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & p_1 \\ 1 & 0 & 1 & p_2 \\ 0 & 1 & p_3 \\ 0 & p_4 \\ p_5 \end{bmatrix}$$

(1) 送信側で付加する検査ビット  $p_1 \sim p_5$ を求めよ.  
(1,0を用いた排他的論理和を示せ)

(2) 受信側で  $y_i$ を計算したところ,  $y_2 = 1, y_3 = 1$ であった.  
1ビットの誤りが情報ビットで発生しているとする, どのビットで誤りが発生したか,  $x_{ij}$ で答えよ.

<解答例>

(1)

$$\begin{aligned} p_1 &= 1 \oplus 0 \oplus 1 \oplus 0 = 0 \\ p_2 &= 1 \oplus 0 \oplus 1 \oplus 0 = 0 \\ p_3 &= 0 \oplus 1 \oplus 1 \oplus 1 = 1 \\ p_4 &= 0 \oplus 1 \oplus 0 \oplus 0 = 1 \\ p_5 &= 0 \oplus 0 \oplus 1 \oplus 1 = 0 \end{aligned}$$

$$Y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & p_1 \\ 1 & 0 & 1 & p_2 \\ 0 & 1 & p_3 \\ 0 & p_4 \\ p_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

排他的論理和が書かれていない場合は減点(-2点)

(2)  $y_2 = 1, y_3 = 1$

$$Y = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} & p_1 \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & p_2 & \blacksquare \\ x_{31} & x_{32} & p_3 \\ x_{41} & p_4 & \uparrow \\ p_5 & & y_3 \end{bmatrix} y_2$$

$y_2$ と $y_3$ の双方に含まれる情報ビットは $x_{23}$ である.