

線形代数学第 2 - 期末試験問題 -

情報システム工学科 1 年生

平成 15 年度後期 - 2004.2.4 -

1. 2 次元ベクトル $x(n) = [x_1(n), x_2(n)]^T$ が次式により更新される。

$$x(n+1) = Ax(n), \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \quad x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- (a) $x(3)$ を求めよ。
(b) $n \rightarrow \infty$ としたとき, $x(n)$ はどうなるか。

2. 次の微分方程式を解け.

$$\frac{d^2 \mathbf{u}(t)}{dt^2} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{u}(t), \quad \mathbf{u}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \frac{d\mathbf{u}(0)}{dt} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

3. 2×2 行列 A の固有値 λ_1, λ_2 と固有ベクトル x_1, x_2 が次のように与えられている. 行列 A を求めよ.

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 1 & \lambda_2 &= 3 \\ x_1 &= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} & x_2 &= \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

4. 行列 A と B が同じ固有ベクトルを持ち, 固有ベクトルを列ベクトルとする行列 S によって, $A = S\Lambda_1 S^{-1}$, $B = S\Lambda_2 S^{-1}$ と表されるとき, $AB = BA$ となることを証明せよ. また, 次の A に対する B の例を求めよ. 但し, B の固有値は適当に与えるものとする.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

5. 行列 A と A^T が同じ固有値を持つことを証明せよ. (参考) $A = S\Lambda S^{-1}$

6. 次の行列について答えよ.

- (a) 固有値に基づいて正定値か否かを求めよ。
(b) f を書き出せ.
(c) f は $x = [0, 0]^T$ でどのような値をとるか. 最大値, 最小値, 鞍形点のいずれかを理由を付して答えよ。

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \quad f = x^T Ax \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

7. 次の行列 A について以下の問いに答えよ.

- (a) 行列 A の固有値 λ_1, λ_2 を求めて, 正定値行列であるか否かを調べよ.
(b) 単位固有ベクトル x_1, x_2 を求めよ.
(c) 固有値を対角要素とする対角行列を Λ とする. 単位固有ベクトルを列ベクトルとする行列を Q とし, $y = Qx$ とするとき, $x^T Ax$ を Λ と y を用いて表せ. さらに, $y = [y_1, y_2]^T$ とするとき, $x^T Ax$ を y_1, y_2 と λ_1, λ_2 を用いて表せ.
(d) $x^T Ax = 1$ のグラフを $y_1 - y_2$ 座標上に図示せよ.
(e) $x = [x_1, x_2]^T$ とするとき, 上のグラフに $x_1 - x_2$ 軸を書き込め.