平成 16 年度後期
情報システム工学科１年生

線形代数学第２　期末試験－解答例－

1. ［２点×１０問＝２０点］
（ア）－３（４）,（イ）－４（３）,（ウ）－３,（エ）－４,（オ）－１,（カ）－６,（キ）－１,（ク）－２,（ケ）－１,（コ）－１

2. ［微分方程式の解：１５点＋安定性：５点＝２０点］
固有値，固有ベクトルを求める．

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 \\ -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)^2 - 1 \tag{1}$$

$$= \lambda^2 - 6\lambda + 8 = (\lambda-2)(\lambda-4) = 0 \tag{2}$$

$$\lambda_1 = 2 \qquad \lambda_2 = 4 \tag{3}$$

$$\begin{bmatrix} 3-2 & -1 \\ -1 & 3-2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{4}$$

$$\begin{bmatrix} 3-4 & -1 \\ -1 & 3-4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{21} \\ x_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{5}$$

$$\boldsymbol{x}_1 = \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{x}_2 = \begin{bmatrix} x_{21} \\ x_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \tag{6}$$

固有値，固有ベクトルを用いて２階微分方程式の一般解は次のようになる．

$$\boldsymbol{u}(t) = (c_1 e^{\sqrt{\lambda_1}t} + d_1 e^{-\sqrt{\lambda_1}t})\boldsymbol{x}_1 + (c_2 e^{\sqrt{\lambda_2}t} + d_2 e^{-\sqrt{\lambda_2}t})\boldsymbol{x}_2 \tag{7}$$

初期条件より，

$$\boldsymbol{u}(0) = (c_1+d_1)\boldsymbol{x}_1 + (c_2+d_2)\boldsymbol{x}_2 = \boldsymbol{u}(0) = [0,1]^T \tag{8}$$

$$\frac{d\boldsymbol{u}(0)}{dt} = (\sqrt{\lambda_1}c_1 - \sqrt{\lambda_1}d_1)\boldsymbol{x}_1 + (\sqrt{\lambda_2}c_2 - \sqrt{\lambda_2}d_2)\boldsymbol{x}_2 \tag{9}$$

$$= \dot{\boldsymbol{u}}(0) = [0,0]^T \tag{10}$$

これらの関係は，固有ベクトルを列ベクトルとする行列を $\boldsymbol{S}$，固有値を対角

要素とする対角行列を $\boldsymbol{\Lambda}$ とすることにより,

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{S}(\boldsymbol{c}+\boldsymbol{d}) &= \boldsymbol{u}(0) && (11)\\
\boldsymbol{S}\sqrt{\boldsymbol{\Lambda}}(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{d}) &= \dot{\boldsymbol{u}}(0)=\boldsymbol{0} && (12)\\
\boldsymbol{c}-\boldsymbol{d} &= \boldsymbol{0} && (13)\\
\boldsymbol{c}=\boldsymbol{d} &= \frac{1}{2}\boldsymbol{S}^{-1}\boldsymbol{u}(0) \\
&= \begin{bmatrix} 1/4 & 1/4 \\ 1/4 & -1/4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/4 \\ -1/4 \end{bmatrix} && (14)
\end{aligned}
$$

これらの結果を式 (7) に代入して微分方程式の一般解を得る.

$$
\boldsymbol{u}(t) = \frac{1}{4}(e^{\sqrt{2}t}+e^{-\sqrt{2}t})\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{4}(e^{2t}+e^{-2t})\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \tag{15}
$$

解の安定性：固有値の実数部＞０であるから不安定である．実際，$e^{\sqrt{2}t}$ や e^{2t} の項は $t\to\infty$ に対して無限大になる.

3. ［１０点］

エルミット行列（対象行列）は固有値と固有ベクトルを用いて次のように表される（スペクトル定理）.

$$
\boldsymbol{A} = \lambda_1\boldsymbol{x}_1\boldsymbol{x}_1^H + \lambda_2\boldsymbol{x}_2\boldsymbol{x}_2^H \tag{16}
$$

この式に与えられた数値を代入する.

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{A} &= 1\times\begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \\
&+ 3\begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + \frac{3}{2}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} && (17)
\end{aligned}
$$

4. ［１０点］

題意により，次のように置く．

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} &= \lambda \boldsymbol{x} \quad (18) \\ \boldsymbol{A}\boldsymbol{y} &= \mu \boldsymbol{y} \quad (19) \\ \lambda &\neq \mu \quad (20) \end{aligned}$$

式 (18) をエルミット転置して，右側から $\boldsymbol{y}$ を掛ける．

$$\boldsymbol{x}^H \boldsymbol{A}\boldsymbol{y} = \lambda \boldsymbol{x}^H \boldsymbol{y} \quad (21)$$

ここでは，$\boldsymbol{A}$ がエルミット行列であることを利用している．式 (19) に左から $\boldsymbol{x}^H$ を掛ける．

$$\boldsymbol{x}^H \boldsymbol{A}\boldsymbol{y} = \mu \boldsymbol{x}^H \boldsymbol{y} \quad (22)$$

上の２つの式の左辺は等しいから，右辺同士も等しいと置いて変形する．

$$(\lambda - \mu)\boldsymbol{x}^H \boldsymbol{y} = 0 \quad (23)$$

条件より，$\lambda \neq \mu$ であるから，$\boldsymbol{x}^H \boldsymbol{y} = 0$ となり，固有ベクトルは互いに直交している．

5. ［５点×２問＝１０点］

(a) 次の式を完全平方の形で表す．

$$\begin{aligned} f(x,y) &= ax^2 + 2bxy + cy^2 \quad (24) \\ &= a\left(x + \frac{b}{a}y\right)^2 + \left(c - \frac{b^2}{a}\right)y^2 \quad (25) \end{aligned}$$

(b) $a > 0, ac - b^2 = 0$ とすると，

$$f(x,y) = a\left(x + \frac{b}{a}y\right)^2 \quad (26)$$

この関数は原点以外に次の直線上でも零となる．

$$x + \frac{b}{a}y = 0 \quad (27)$$

$f(x,y) \geq 0$ であり，かつ，原点以外の点でも $f(x,y) = 0$ となる関数は半正定値である．

6. ［３点×６問＝１８点］

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

(a) 行列 $\boldsymbol{A}$ の固有値 λ_1，λ_2 を求める．

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} \tag{28}$$

$$= (2-\lambda)^2 - 1 = (\lambda-1)(\lambda-3) \tag{29}$$

$$\lambda_1 = 1 \qquad \lambda_2 = 3 \tag{30}$$

行列 $\boldsymbol{A}$ は固有値が全て正であるから，正定値行列である．

(b) 単位固有ベクトルを求める．

$$(\boldsymbol{A} - \lambda_i \boldsymbol{I})\boldsymbol{x}_i = \boldsymbol{0}\text{より} \tag{31}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{32}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{21} \\ x_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{33}$$

$$\boldsymbol{x}_1 = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{x}_2 = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \tag{34}$$

(c) 固有値を対角要素とする対角行列を $\boldsymbol{\Lambda}$ とし，単位固有ベクトルを列ベクトルとする行列を $\boldsymbol{Q}$ とし，$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{Q}^T\boldsymbol{x}$ とする．

$$\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}^T\boldsymbol{Q}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{Q}^T\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{Q}^T\boldsymbol{x})^T\boldsymbol{\Lambda}(\boldsymbol{Q}^T\boldsymbol{x}) \tag{35}$$

$$= \boldsymbol{y}^T\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{y} = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 \tag{36}$$

(d) 式 (36) より，

$$y_1^2 + 3y_2^2 = 1 \tag{37}$$

$$\frac{y_1^2}{(1/\sqrt{1})^2} + \frac{y_2^2}{(1/\sqrt{3})^2} = 1 \tag{38}$$

上式のグラフは長軸が $1/\sqrt{1}$，短軸が $1/\sqrt{3}$ である楕円となる（グラフは別紙）．

(e)

$$\begin{aligned} \boldsymbol{y} &= \boldsymbol{Q}^T \boldsymbol{x} && (39) \\ \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} && (40) \end{aligned}$$

$x_1 = x_2$ のとき $y_1 = 0$ となり，これは y_2 軸に相当する．また，$x_1 > 0, x_2 > 0$ の領域で $y_2 > 0$ である．$x_1 = -x_2$ のとき $y_2 = 0$ となり，これは y_1 軸に相当する．また，$x_1 > 0, x_2 < 0$ の領域で $y_1 > 0$ である．$y_1 - y_2$ 軸は $x_1 - x_2$ 軸を-45 度回転したものであり，逆に，$x_1 - x_2$ 軸は $y_1 - y_2$ 軸を 45 度回転したものである．回転角度は反時計回りを正とする．
（グラフは別紙）

(f) 前問の結果より，ベクトルに行列 $\boldsymbol{Q}$ を掛けることは，そのベクトルを-45 度回転する.（採点においては符号に関しては甘く評価する）

7. ［１２点］

$\boldsymbol{x}^T \boldsymbol{A} \boldsymbol{x} > 0$ は任意のベクトルに対して成り立つから $\boldsymbol{x}$ として始めの k 個の成分からなる部分ベクトルを $\boldsymbol{x}_k$ とし，残りの $n-k$ 個の成分は零とする．

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x} &= \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_k \\ \boldsymbol{0} \end{bmatrix} && (41) \\ \boldsymbol{x}^T \boldsymbol{A} \boldsymbol{x} &= \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_k^T & \boldsymbol{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{A}_k & * \\ * & * \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_k \\ \boldsymbol{0} \end{bmatrix} = \boldsymbol{x}_k^T \boldsymbol{A}_k \boldsymbol{x}_k > 0 && (42) \end{aligned}$$

最後の式より，全ての固有値が正となるから，$\boldsymbol{A}_k$ の固有値は全て正となる．一方,「行列式＝固有値の積」であるから，$\boldsymbol{A}_k$ の行列式は正となる．