平成17年度後期

2006.1.11

線形代数学第2 ー中間試験ー
解答例

1. (ア)−13), (イ)−11), (ウ)−8), (エ)−14), (オ)−2),
(カ)−3), (キ)−1), (ク)−6)

2. $(t, y) = (0,1), (1,3), (2,6)$ を代入して連立方程式を作る.

$$\begin{cases} 1 = C + D \\ 3 = C + 2D \\ 6 = C + 4D \end{cases} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} C \\ D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 6 \end{bmatrix} \rightarrow A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$

最小二乗解は

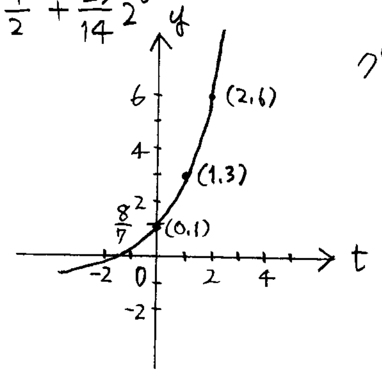
$A^TA\bar{\boldsymbol{x}} = A^T\boldsymbol{b}$ $\quad\therefore\ \bar{\boldsymbol{x}} = (A^TA)^{-1}A^T\boldsymbol{b}$ より求まる.

$$A^TA = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 7 & 21 \end{bmatrix}$$

$$(A^TA)^{-1} = \frac{1}{14}\begin{bmatrix} 21 & -7 \\ -7 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\bar{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} C \\ D \end{bmatrix} = \frac{1}{14}\begin{bmatrix} 21 & -7 \\ -7 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 6 \end{bmatrix} = \frac{1}{14}\begin{bmatrix} -7 \\ 23 \end{bmatrix}$$

$$y = -\frac{1}{2} + \frac{23}{14}2^t$$



グラフは概略図でよい.

3.

$$\boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$ //

$$\boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{a}_2 - \frac{\boldsymbol{v}_1^T\boldsymbol{a}_2}{\boldsymbol{v}_1^T\boldsymbol{v}_1}\boldsymbol{v}_1 \qquad \begin{cases} \boldsymbol{v}_1^T\boldsymbol{a}_2 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = 1 \\ \boldsymbol{v}_1^T\boldsymbol{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = 2 \end{cases}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/2 \\ -1/2 \\ 1 \end{bmatrix}$$ //

$$\boldsymbol{v}_3 = \boldsymbol{a}_3 - \frac{\boldsymbol{v}_1^T\boldsymbol{a}_3}{\boldsymbol{v}_1^T\boldsymbol{v}_1}\boldsymbol{v}_1 - \frac{\boldsymbol{v}_2^T\boldsymbol{a}_3}{\boldsymbol{v}_2^T\boldsymbol{v}_2}\boldsymbol{v}_2$$

$$= \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} + \frac{4}{3}\begin{bmatrix} -1/2 \\ -1/2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/3 \\ 1/3 \\ 1/3 \end{bmatrix}$$ //

$$\boldsymbol{v}_1^T\boldsymbol{a}_3 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = 0$$

$$\boldsymbol{v}_2^T\boldsymbol{a}_3 = \begin{bmatrix} -1/2, & -1/2, & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = -2$$

$$\boldsymbol{v}_2^T\boldsymbol{v}_2 = \begin{bmatrix} -1/2, & -1/2, & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1/2 \\ -1/2 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{3}{2}$$

4. $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ を行ベクトルとする行列の階数を調べる. ガウスの前進消去を行う.

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & -3 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 2 & -2 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

階数 $= 3 <$ ベクトルの数 であるから $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ は線形独立ではない.

5. $\det A = 0$, 第1行と第3行が同じであるから.

$\det B = 3 \times (-2) \times 5 \times (-2) = 60$ // 三角行列であるから対角要素の積に等しい.

$\det C = 0$ // 第3行が零であるから

$$\det D = (-1)^2 2\begin{vmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 3 \\ 2 & 5 & -6 \end{vmatrix} = (-1)^2 2 (-1)^3 3\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 2 & -6 \end{vmatrix}$$

$$= (-1)2 \times 3 \times 6 = -36$$ //

6.

(a) $\|\mathbb{Q}x\|^2 = (\mathbb{Q}x)^T\mathbb{Q}x = x^T\mathbb{Q}^T\mathbb{Q}x = x^Tx = \|x\|^2$

従って，$\mathbb{Q}x$ と x の長さは等しい

(b) $\mathbb{A}^T\mathbb{A} = \mathbb{I}$，$\mathbb{A}\mathbb{A}^T = \mathbb{I}$ となることを示す．

$$\mathbb{A}^T\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

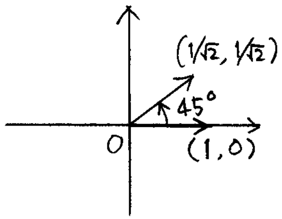
$$\mathbb{A}\mathbb{A}^T = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

以上より，$\mathbb{A}$ は直交行列である．

(c) 直交行列はベクトルの長さを変えず，回転のみを与える．
全てのベクトルに対して同じ回転を与える．簡単のために
$x = [1, 0]^T$ を考える．

$$\mathbb{A}x = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

右の図に示すように 45° 回転する．



(参考) ベクトルの角度を θ だけ回転する直交行列は

$$\mathbb{Q} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$ で表される．

$-45°$ $(=315°)$ 回転させる直交行列は，$\sin\theta = -1/\sqrt{2}$，$\cos\theta = 1/\sqrt{2}$ であるから，

$$\mathbb{Q} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2}, & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2}, & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$ となる．

$\mathbb{A}x$ と x のはさむ角度を θ とすると，

$$\cos\theta = \frac{(\mathbb{A}x)^T x}{\|\mathbb{A}x\|\cdot\|x\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$，これより，$\theta = \pm 45°$

この場合，はさむ角度を表すことはできるが，回転の方向まで表すことはできない．

7.

(a) 正しくない．
$\mathbb{A}$ が $n \times n$ 行列で階数 $r = n$ であるときは正則行列であり，
$\mathbb{A}^{-1}$ が存在する．この場合は

$$\mathbb{A}x = \mathbb{0} \rightarrow x = \mathbb{A}^{-1}\mathbb{0} = \mathbb{0}$$

となり，$\mathbb{0}$ 以外の解は存在しない．

(b) 正しくない．

$$\mathbb{A} = \begin{bmatrix} - a_1 - \\ - a_2 - \\ \vdots \\ - a_n - \end{bmatrix}$$ とすると $$2\mathbb{A} = \begin{bmatrix} -2a_1 - \\ -2a_2 - \\ \vdots \\ -2a_n - \end{bmatrix}$$

行列式の線形性より

$$\det 2\mathbb{A} = 2^n \det \mathbb{A}$$

(c) 正しい
(行列の基本操作により，行列式は変わらない)

(d) 正しくない
$\mathbb{A}$ の列空間にあるベクトルは $\mathbb{A}x$ と表される．$\mathbb{b}$ が $\mathbb{A}$ の列空間に含まれないときは $\mathbb{b}$ を $\mathbb{A}x$ の形で表すことができない．
すなわち，$\|\mathbb{A}x - \mathbb{b}\|$ を零にする x が存在しない．このとき，
$\mathbb{A}x = \mathbb{b}$ の解は一意解ではなく，不能解となる．