線形代数学第２ －中間試験問題－

情報システム工学科１年生　　　平成１８年度後期－ 2006.12.13 －

1. 曲線 $y = C + D4^t$ で３点 $(t, y) = (0, 1), (1/2, 2), (1, 4)$ を近似するとき，誤差の二乗和を最小にするように C, D を求めよ．y，C，D，t はスカラーである．また，$t-y$ 平面上に３点 $(t, y) = (0, 1), (1/2, 2), (1, 4)$ と $y = C + D4^t$ の概略を図示せよ．

2. ベクトル $\boldsymbol{b} = [1, -1, 1]^T$ をベクトル $\boldsymbol{a} = [1, 0, 1]^T$ 上に射影した成分 $\boldsymbol{b}_1$ とこれに直交する成分 $\boldsymbol{b}_2$ に分解せよ．さらに，ベクトル $\boldsymbol{b}_1$ と $\boldsymbol{b}_2$ が直交することを確かめよ.（参考）$\boldsymbol{b}_1$ は射影の式を用いて求める．

3. 線形独立なベクトル $\boldsymbol{a}_1 = [1, 1, 0]^T, \boldsymbol{a}_2 = [1, 0, -1]^T, \boldsymbol{a}_3 = [1, 1, -1]^T$ を互いに直交するベクトル $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ に変換せよ（ベクトルの長さを１にする必要はない）．さらに，それらが互いに直交することを確かめよ.（参考）Gram-Schmidt の直交化法を利用する．

4.　次の行列の擬似逆行列を求めよ．

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

5.　階数 r の $m \times n$ 行列 $\boldsymbol{A}$ について，$\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}$ は対称行列であり，その階数は r であることを証明せよ．（参考）対称行列は $\boldsymbol{B}^T = \boldsymbol{B}$ を満たす．行列の列の数を n，階数を r とすると，零空間の次元は $n - r$ であることを踏まえて，$\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}$ の零空間が同じであることを示す．

6. 次のベクトルが線形独立であるか調べよ．

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a} &= [1, 0, -1, 2, 0]^T \\ \boldsymbol{b} &= [-1, 2, 0, 1, -1]^T \\ \boldsymbol{c} &= [1, -1, 0, 2, 1]^T \end{aligned}$$

7. 次の行列式を求めよ．行列の性質１～１０，または行列式の適当な公式を用いて計算する．

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 3 \end{bmatrix} \; \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & 0 \\ 7 & -3 & 3 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 3 \end{bmatrix} \; \boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 2 & -4 & -1 & 2 \\ 5 & 2 & 3 & -1 \\ 7 & 6 & 2 & -3 \end{bmatrix} \; \boldsymbol{D} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 2 & 0 \\ 1 & -7 & 6 & 0 \\ 2 & 5 & 9 & 1 \end{bmatrix}$$

8.　次の行列 $\boldsymbol{A}$ の逆行列を $adj\boldsymbol{A}/det\boldsymbol{A}$ により求めよ．

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$