平成 19 年度後期
情報システム工学科 1 年生

線形代数学第 2　期末試験＜解答例＞ 2008.2.6

1. 2 次元ベクトル $\boldsymbol{x}(n) = [x_1(n), x_2(n)]^T$ が次式により更新される。

$$\boldsymbol{x}(n+1) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(n), \qquad \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

(a) $\boldsymbol{x}(3)$ を求めよ。
＜解答例＞
一般解は

$$\boldsymbol{x}(n) = \boldsymbol{A}^n \boldsymbol{x}(0) \tag{1}$$

で与えられる．$\boldsymbol{A}^n$ は $\boldsymbol{A}$ の固有値を対角要素とする対角行列を $\boldsymbol{\Lambda}$，固有ベクトルを列ベクトルとする行列を $\boldsymbol{S}$ とすると，行列の対角化により，$\boldsymbol{A}^n = \boldsymbol{S}\boldsymbol{\Lambda}^n\boldsymbol{S}^{-1}$ と表される．固有値は $\boldsymbol{A}$ が三角行列であるから，$\lambda_1 = 1$，$\lambda_2 = 2$ である．これらに対する固有ベクトルは

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{2}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{3}$$

より，

$$\boldsymbol{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{x}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{4}$$

となる．これらより，

$$\boldsymbol{\Lambda} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \tag{5}$$

$$\boldsymbol{S} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{S}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \tag{6}$$

を得る．これらより，$\boldsymbol{A}^n$ は次のようになる．

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}^n &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1^n & 0 \\ 0 & 2^n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1-2^n & 2^n \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{7}$$

従って，一般解は

$$\boldsymbol{x}(n) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1-2^n & 2^n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1-2^{n+1} \end{bmatrix} \tag{8}$$

となる．$\boldsymbol{x}(3)$ は上式で $n=3$ とおいて，求まる．

$$\boldsymbol{x}(n) = \begin{bmatrix} 1 \\ -15 \end{bmatrix} \tag{9}$$

(b) $n \to \infty$ としたとき，$\boldsymbol{x}(n)$ はどうなるか。

＜解答例＞

一般解において，$n \to$ とする．

$$\boldsymbol{x}(\infty) = \begin{bmatrix} 1 \\ -\infty \end{bmatrix} \tag{10}$$

このように，負の無限大に発散する．

2. 行列 $\boldsymbol{A}$ を掛けることにより，任意のベクトル $\boldsymbol{a}$ を $\boldsymbol{x}_1 = [1,1]^T$ 方向に 1 倍，$\boldsymbol{x}_2 = [1,-1]^T$ 方向に 2 倍するような行列 $\boldsymbol{A}$ を求めよ.（ヒント）$\boldsymbol{a}$ から $\boldsymbol{x}_1$ 上への射影，$\boldsymbol{x}_2$ 上への射影を考える．$\boldsymbol{Aa}$ をスペクトル定理に基づいて表現．但し，固有ベクトルは正規化.

＜解答例＞

$\boldsymbol{A}$ の固有値を λ_1，λ_2 とし，固有ベクトルを $\boldsymbol{x}_1$，$\boldsymbol{x}_2$ とすると，$\boldsymbol{Aa}$ はスペクトル定理により，次のように表される．

$$\boldsymbol{Aa} = \lambda_1 \boldsymbol{x}_1 \boldsymbol{x}_1^T \boldsymbol{a} + \lambda_2 \boldsymbol{x}_2 \boldsymbol{x}_2^T \boldsymbol{a} \tag{11}$$

さらに，固有ベクトルが正規化されているとすると，

$$\boldsymbol{x}_i \boldsymbol{x}_i^T \boldsymbol{a} = \frac{\boldsymbol{x}_i \boldsymbol{x}_i^T}{\boldsymbol{x}_i^T \boldsymbol{x}_i} \boldsymbol{a} \tag{12}$$

であるから，これは，ベクトル $\boldsymbol{a}$ からベクトル $\boldsymbol{x}_i$ への射影を表している．ベクトル $\boldsymbol{a}$ の $\boldsymbol{x}_i$ 方向の成分とは，$\boldsymbol{a}$ から $\boldsymbol{x}_i$ への射影に相当する．式 (11) は固有ベクトルへの射影（成分）を固有値倍している．従って，固有値が $\lambda_1 = 1$，$\lambda_2 = 2$ であり，固有ベクトル（正規化する）が $\boldsymbol{x}_1 = [1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}]^T$，$\boldsymbol{x}_2 = [1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}]^T$ である行列が求めるものである．行列 $\boldsymbol{A}$ はスペクトル定理，または，行列の対角化の関係を用いて求めることができる．
（スペクトル定理により）

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{A} &= \lambda_1 \boldsymbol{x}_1 \boldsymbol{x}_1^T + \lambda_2 \boldsymbol{x}_2 \boldsymbol{x}_2^T \\
&= \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \qquad (13)
\end{aligned}
$$

（行列の対角化により）

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{A} &= \boldsymbol{S \Lambda S}^{-1} \qquad (14) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \qquad (15)
\end{aligned}
$$

3. 固有値，固有ベクトルに関して，以下の性質を証明せよ．

(a) 対称行列 $\boldsymbol{A}$ において，固有値が異なるならば，固有ベクトルは直交する．

＜解答例＞

固有値，固有ベクトルの関係を

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_1 &= \lambda_1 \boldsymbol{x}_1 \qquad (16) \\
\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_2 &= \lambda_2 \boldsymbol{x}_2 \qquad (17)
\end{aligned}
$$

とおく．式 (16) を転置して，右から $\boldsymbol{x}_2$ を掛ける．

$$
\boldsymbol{x}_1^T \boldsymbol{A} \boldsymbol{x}_2 = \lambda_1 \boldsymbol{x}_1^T \boldsymbol{x}_2 \qquad (18)
$$

ここで，$\boldsymbol{A}^T = \boldsymbol{A}$ を利用している．次に，式 (17) に左から $\boldsymbol{x}_1^T$ を掛ける．

$$\boldsymbol{x}_1^T \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_2 = \lambda_2 \boldsymbol{x}_1^T \boldsymbol{x}_2 \tag{19}$$

式 (18) と (19) は左辺が等しいから，右辺も等しいとおいて，変形すると次式を得る．

$$(\lambda_1 - \lambda_2)\boldsymbol{x}_1^T \boldsymbol{x}_2 = 0 \tag{20}$$

$\lambda_1 \neq \lambda_2$ であるから，$\boldsymbol{x}_1^T \boldsymbol{x}_2 = 0$ となる．内積=0 であるから，$\boldsymbol{x}_1$ と $\boldsymbol{x}_2$ は直交する．(証明終)

(b) $\boldsymbol{A}$ の固有値が λ で，固有ベクトルが $\boldsymbol{x}$ であるとき，$\boldsymbol{A}^k$ の固有値は λ^k で固有ベクトルは $\boldsymbol{x}$ である．
＜解答例＞固有値，固有ベクトルの関係を

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \lambda \boldsymbol{x} \tag{21}$$

とおく．上式に左から $\boldsymbol{A}$ を掛ける．

$$\boldsymbol{A}^2 \boldsymbol{x} = \lambda \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \lambda^2 \boldsymbol{x} \tag{22}$$

これを繰り返すことにより，

$$\boldsymbol{A}^k \boldsymbol{x} = \lambda^k \boldsymbol{x} \tag{23}$$

を得る．この式は，$\boldsymbol{A}^k$ の固有値が λ^k で，固有ベクトルが $\boldsymbol{x}$ であることを示している．
さらに，式 (21) に左から $\boldsymbol{A}^{-1}$ を掛ける．

$$\boldsymbol{x} = \lambda \boldsymbol{A}^{-1} \boldsymbol{x} \tag{24}$$

上式に λ^{-1} を掛けて，整理すると次式を得る．

$$\boldsymbol{A}^{-1} \boldsymbol{x} = \lambda^{-1} \boldsymbol{x} \tag{25}$$

この式は，$\boldsymbol{A}^{-1}$ の固有値が λ^{-1} で，固有ベクトルは変化しないことを表している．上式で，左から $\boldsymbol{A}^{-1}$ を掛けることにより，

$$\boldsymbol{A}^{-k} \boldsymbol{x} = \lambda^{-k} \boldsymbol{x} \tag{26}$$

を得る．この式は，$\boldsymbol{A}^{-k}$ の固有値が λ^{-k} で，固有ベクトルが $\boldsymbol{x}$ であることを示している．(証明終)

＜別法＞

$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{S}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{S}^{-1}$ と表されることを利用する．$k > 0$ とする．

$$\boldsymbol{A}^k = \boldsymbol{S}\boldsymbol{\Lambda}^k\boldsymbol{S}^{-1} \tag{27}$$

であるから，固有値が k 乗され，固有ベクトルはそのままである．次に，$\boldsymbol{A}^{-1}$ を求める．

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{S}\boldsymbol{\Lambda}^{-1}\boldsymbol{S}^{-1} \tag{28}$$

であるから，$\boldsymbol{A}^{-1}$ を k 乗することにより，

$$\boldsymbol{A}^{-k} = \boldsymbol{S}\boldsymbol{\Lambda}^{-k}\boldsymbol{S}^{-1} \tag{29}$$

となり，固有値が $-k$ 乗され，固有ベクトルはそのままである．

(c) 行列 $\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{A}^T$ は同じ固有値を持つ．

（参考）$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{S}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{S}^{-1}$．$(\boldsymbol{S}^{-1})^T = (\boldsymbol{S}^T)^{-1}$．

＜解答例＞

一般に，固有値を対角要素とする対角行列 $\boldsymbol{\Lambda}$ と固有ベクトルを列ベクトルとする行列 $\boldsymbol{S}$ を用いて

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{S}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{S}^{-1} \tag{30}$$

と表される．上式で転置をとる．

$$\boldsymbol{A}^T = (\boldsymbol{S}^{-1})^T\boldsymbol{\Lambda}^T\boldsymbol{S}^T = (\boldsymbol{S}^{-1})^T\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{S}^T \tag{31}$$

$\boldsymbol{B} = (\boldsymbol{S}^{-1})^T$ とおくと，(参考）より $\boldsymbol{B}^{-1} = \boldsymbol{S}^T$ であるから，

$$\boldsymbol{A}^T = \boldsymbol{B}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{B}^{-1} \tag{32}$$

となる．これより，$\boldsymbol{B}$ が $\boldsymbol{A}^T$ の固有ベクトルを列ベクトルとする行列であり，$\boldsymbol{\Lambda}$ は $\boldsymbol{A}^T$ の固有値を対角要素とする対角行列である．従って，$\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{A}^T$ の固有値は等しくなる．(証明終)

4. 行列 $\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{B}$ が同じ固有ベクトルを持ち，固有ベクトルを列ベクトルとする行列 $\boldsymbol{S}$ によって，$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{S}\boldsymbol{\Lambda}_1\boldsymbol{S}^{-1}$，$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{S}\boldsymbol{\Lambda}_2\boldsymbol{S}^{-1}$ と表されるとき，$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$ となることを証明せよ．また，次の $\boldsymbol{A}$ に対する $\boldsymbol{B}$ の例を求めよ．但し，$\boldsymbol{B}$ の固有値は適当に与えるものとする．

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

＜解答例＞

$\boldsymbol{AB}$，$\boldsymbol{BA}$ は次のように変形できる．

$$\begin{aligned} \boldsymbol{AB} &= \boldsymbol{S}\boldsymbol{\Lambda}_1\boldsymbol{S}^{-1}\boldsymbol{S}\boldsymbol{\Lambda}_2\boldsymbol{S}^{-1}=\boldsymbol{S}\boldsymbol{\Lambda}_1\boldsymbol{\Lambda}_2\boldsymbol{S}^{-1} && (33)\\ \boldsymbol{BA} &= \boldsymbol{S}\boldsymbol{\Lambda}_2\boldsymbol{S}^{-1}\boldsymbol{S}\boldsymbol{\Lambda}_1\boldsymbol{S}^{-1}=\boldsymbol{S}\boldsymbol{\Lambda}_2\boldsymbol{\Lambda}_1\boldsymbol{S}^{-1} && (34) \end{aligned}$$

$\boldsymbol{\Lambda}_1$ と $\boldsymbol{\Lambda}_2$ は対角行列であるから，これらの積は交換可能である．

$$\boldsymbol{\Lambda}_1\boldsymbol{\Lambda}_2=\boldsymbol{\Lambda}_2\boldsymbol{\Lambda}_1 \tag{35}$$

以上より，$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$ となる．(証明終)

次に，設問の行列 $\boldsymbol{A}$ に対する $\boldsymbol{B}$ を求める．行列 $\boldsymbol{A}$ は三角行列であるから，固有値は $\lambda_1=1$，$\lambda_2=2$ である．これらに対する固有ベクトルは

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{36}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{37}$$

より，

$$\boldsymbol{x}_1=\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{x}_2=\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{38}$$

となる．ここで，$\boldsymbol{B}$ の固有値を 1，-1 とする．

$$\begin{aligned} \boldsymbol{B} &= \boldsymbol{S}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{S}^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} && (39) \end{aligned}$$

（検証）

$$\boldsymbol{AB} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \tag{40}$$

$$\boldsymbol{BA} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \tag{41}$$

5. 次の微分方程式を解け．また，この微分方程式の解は安定であるか，不安定であるか示せ．

$$\frac{d^2\boldsymbol{u}(t)}{dt^2} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\boldsymbol{u}(t), \quad \boldsymbol{u}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \frac{d\boldsymbol{u}(0)}{dt} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

<解答例>

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \tag{42}$$

とおいて，固有値と固有ベクトルを求める．

$$\det(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I}) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \boldsymbol{0} \tag{43}$$

より，

$$(\lambda+1)(\lambda-3) = 0 \tag{44}$$

従って，$\lambda_1 = -1$，$\lambda_2 = 3$ を得る．これらに対する固有ベクトルは $(\boldsymbol{A} - \lambda_i \boldsymbol{I})\boldsymbol{x}_i = \boldsymbol{0}$ より，

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{45}$$

$$\begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{46}$$

上式より，

$$\boldsymbol{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{x}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{47}$$

これらより，微分方程式の一般解は次式で与えられる．

$$\boldsymbol{u}(n) = (c_1 e^{it} + d_1 e^{-it}) \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + (c_2 e^{\sqrt{3}t} + d_2 e^{-\sqrt{3}t}) \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{48}$$

次に，初期条件を加味する．

$$\boldsymbol{u}(0) = (c_1 + d_1) \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + (c_2 + d_2) \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{49}$$

$$\frac{\boldsymbol{u}(t)}{dt}\Big|_{t=0} = (c_1 i - d_1 i) \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + (\sqrt{3}c_2 - \sqrt{3}d_2) \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{50}$$

★ $d\boldsymbol{u}(0)/dt = [0,1]^T$ では解が求まらない．ここまでで，微分方程式の解を求める問題としては満点とする★

★以下は $d\boldsymbol{u}(0)/dt = [0,0]^T$ として求める★

$$c_1 = c_2 = d_1 = d_2 = \frac{1}{4} \tag{51}$$

これを式 (48) に代入して，微分方程式の解が求まる．

$$\boldsymbol{u}(n) = \frac{1}{4}(e^{it} + e^{-it}) \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + \frac{1}{4}(e^{\sqrt{3}t} + e^{-\sqrt{3}t}) \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{52}$$

安定性の評価：
$|Re[\pm\sqrt{\lambda_i}]| < 0$ →安定，$= 0$ →臨界，> 0 →不安定（発散）．

$$|Re[\pm\sqrt{\lambda_1}]| = 0 \tag{53}$$

$$|Re[\pm\sqrt{\lambda_2}]| = \sqrt{3} > 0 \tag{54}$$

従って，この微分方程式の解は不安定（発散）である．

6.　複素ベクトル $\boldsymbol{x} = [1+i, 1]^T$ と $\boldsymbol{y} = [1, 1-i]^T$ について

(a)　各々の長さ（ノルム）を求めよ（$\sqrt{\text{数値}}$ の形でよい）．

＜解答例＞

$$\begin{aligned}
\| \boldsymbol{x} \|^2 &= \boldsymbol{x}^H\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 1-i & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1+i \\ 1 \end{bmatrix} \\
&= (1-i)(1+i)+1 = 3 && (55) \\
\| \boldsymbol{x} \| &= \sqrt{3} && (56) \\
\| \boldsymbol{y} \|^2 &= \boldsymbol{y}^H\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} 1 & 1+i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1-i \end{bmatrix} \\
&= 1+(1+i)(1-i) = 3 && (57) \\
\| \boldsymbol{y} \| &= \sqrt{3} && (58) \\
& && (59)
\end{aligned}$$

(b) $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ の内積を求めよ.

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{x}^H\boldsymbol{y} &= \begin{bmatrix} 1-i & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1-i \end{bmatrix} \\
&= 1-i+1-i = 2-2i && (60) \\
\boldsymbol{y}^H\boldsymbol{x} &= \begin{bmatrix} 1 & 1+i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1+i \\ 1 \end{bmatrix} \\
&= 1+i+1+i = 2+2i && (61)
\end{aligned}$$