線形代数学第２－中間試験問題＜解答例＞－

情報システム工学科１年生　　平成１９年度後期－ 2007.11.28 －

1.　次の問いに答えよ．

(a) 直線 $y=3x$ 上で，座標点 $(1,1)$ への距離が最小となる点の座標を求めよ．

(b) 平面 $x+2y-z=0$ 上で，座標点 $(1,1,0)$ への距離が最小となる点の座標を求めよ．

＜解答例＞

(a) 直線 $y=3x$ 上の一つのベクトルを $\boldsymbol{a}=[1,3]^T$ とし，座標点 $(1,1)$ に対するベクトルを $\boldsymbol{b}=[1,1]^T$ とするとき，求める座標はベクトル $\boldsymbol{b}$ からベクトル $\boldsymbol{a}$ への射影 $\boldsymbol{p}$ となる．

$$\boldsymbol{p}=\frac{\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{a}}\boldsymbol{a}=\frac{4}{10}\begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2/5\\6/5\end{bmatrix} \tag{1}$$

これより，求める座標は $(2/5,6/5)$ となる．

(b) 座標点 $(1,1,0)$ に対応するベクトル $\boldsymbol{b}=[1,1,0]^T$ から平面 $x+2y-z=0$ への射影が求める座標を表している．平面を張るベクトルは $x+2y-z=0$ を満たす x,y,z を要素するベクトルである．ここでは，$\boldsymbol{a}_1=[1,0,1]^T$，$\boldsymbol{a}_2=[0,1,2]^T$ とする．$\boldsymbol{a}_1$，$\boldsymbol{a}_2$ を列ベクトルとする行列を $\boldsymbol{A}$ とすると，平面 $x+2y-z=0$ は $\boldsymbol{A}$ の列空間となる．$\boldsymbol{b}$ から $\boldsymbol{A}$ の列空間への射影は次式で求まる．

$$\boldsymbol{p}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{A}^T \tag{2}$$

$$=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\\1&2\end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\0&1\\1&2\end{bmatrix}\right)^{-1}\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\\1&2\end{bmatrix}\frac{1}{6}\begin{bmatrix}5&-2\\-2&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1/2\\0\\1/2\end{bmatrix} \tag{3}$$

従って，求める座標は $(1/2, 0, 1/2)$ である．この座標が $x + 2y - z = 0$ 上にあることが確認できる．また，$\boldsymbol{b} - \boldsymbol{p}$ が平面，すなわち，$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2$ に直交している（内積=0 となる）ことも確認できる．

2. 次の行列 $\boldsymbol{A}$ に対して，以下の問いに答えよ．

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

(a) $\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}$ を求めよ．これが，対称行列となっていることを確かめよ．
(b) $\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}$ の階数 r を求め，これらが等しいことを示せ．
(c) $\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}$ の零空間が等しいことを確かめよ．
(d) $\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}$ の逆行列は存在する／しないのいずれか．理由も述べよ．
(e) $\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}$ の逆行列が存在する条件を示せ．
(f) 上記の条件を満たす $\boldsymbol{A}$ の 3×2 行列の例を示し，$\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}$ の逆行列を求めよ．

＜解答例＞

(a)

$$\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 6 \end{bmatrix} \tag{4}$$

上式が対称行列であることが分かる．

(b) $\boldsymbol{A}$ に対してガウスの前進消去を行う．

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{5}$$

これより，$\boldsymbol{A}$ の階数は $r = 2$ である．さらに，$\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}$ についてもガウスの

前進消去を行う．

$$\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 6 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 3 & 3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{6}$$

これより，$\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}$ の階数も $r = 2$ である．

(c) $\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}$ の零空間を求める．前の設問でガウスの前進消去まで行っているので，その結果を利用する．まず，$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ は次のようになる．

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{7}$$

u，v を基底変数，w を自由変数とする．上式は

$$u + w = 0 \tag{8}$$

$$v + w = 0 \tag{9}$$

となるから，$u = -w$，$v = -w$ であり，一般解は

$$\boldsymbol{x} = w \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{10}$$

となる．すなわち，$\boldsymbol{A}$ の零空間は 1 次元で基底が $[-1, -1, 1]^T$ である．

$\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ の一般解も同様に求まる．

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{11}$$

u，v を基底変数，w を自由変数とする．上式は

$$u + w = 0 \tag{12}$$

$$v + w = 0 \tag{13}$$

となるから，$u = -w$，$v = -w$ であり，一般解は

$$\boldsymbol{x} = w \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{14}$$

となる．すなわち，$\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}$ の零空間は 1 次元で基底が $[-1,-1,1]^T$ である．これは，$\boldsymbol{A}$ の零空間と同じである．

(d) $\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}$ の逆行列は存在しない．理由は，階数＜行，列の数であり，全ての行ベクトル，あるいは，列ベクトルが線形独立ではなく，$\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}$ は特異行列となり，逆行列は存在しない．

(e) $\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}$ の逆行列が存在する条件は「$\boldsymbol{A}$ の列ベクトルが全て線形独立であること」である．(「$\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}$ の階数＝行及び列の数」と答えても良い．しかし，次の設問のためには，先に述べた条件が必要となる．)

(f) 列ベクトルが全て線形独立な 3×2 行列の例を示せばよい．

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \tag{15}$$

$$\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \tag{16}$$

$$(\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A})^{-1} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \tag{17}$$

3. 次の連立方程式の最適な最小 2 乗解を以下の問いに従って求めよ．

$$\begin{aligned} u+v &= 1 \\ v-w &= 0 \\ u+w &= 1 \\ -v+w &= -1 \end{aligned}$$

(a) 上の連立方程式を行列とベクトルを用いて表せ．これを，$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ とする．

(b) 最小 2 乗解を求める方程式を求めよ．これを $\hat{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{x}=\hat{\boldsymbol{b}}\cdots$ 　とする．

(c) 式　の一般解を求めよ．これが，最小 2 乗解である．

(d) $\hat{\boldsymbol{A}}$ の零空間を求めよ．次元と基底を求める．

(e) 式　の一般解を $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_r+\boldsymbol{x}_n$ としたときの $\boldsymbol{x}_r$ を求めよ．但し，$\boldsymbol{x}_r$ は $\hat{\boldsymbol{A}}$ の行空間にある成分，$\boldsymbol{x}_n$ は零空間にある成分である．$\boldsymbol{x}_r$ が最適な最小 2 乗解である．

(f) $\boldsymbol{x}_r$ が式　を満たすことを示せ．

(g) $\boldsymbol{x}_r$ が零空間に直交することを示せ.
＜解答例＞

(a) 連立方程式を $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ の形で表す.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \tag{18}$$

(b) 最小 2 乗解を求める方程式は $\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{b}$ であるから,

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \tag{19}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \hat{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{x}=\hat{\boldsymbol{b}}\cdots \tag{20}$$

(c) 前の設問における方程式の一般解を求める．まず，$\hat{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ の一般解を求める.

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{21}$$

係数行列に対してガウスの前進消去を行う.

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 5/2 & -5/2 \\ 0 & -5/2 & 5/2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 5/2 & -5/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{22}$$

方程式は次のようになる.

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 5/2 & -5/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{23}$$

従って，u と v を基底変数に，w を自由変数とする．上式から，

$$2u + v + w = 0 \tag{24}$$

$$v - w = 0 \tag{25}$$

となるので，

$$v = w \tag{26}$$

$$u = -w \tag{27}$$

を得る．従って，$\hat{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の一般解は

$$\boldsymbol{x} = w \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{28}$$

となる．さらに，$\hat{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{x} = \hat{\boldsymbol{b}}$ の特殊解は式 (20)，または，この式でガウスの前進消去を行った次式で $w = 0$ とおいて求められる．

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 5/2 & -5/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{29}$$

方程式は

$$2u + v = 2 \tag{30}$$

$$\frac{5}{2}v = 1 \tag{31}$$

となるから，$v = 2/5$，$u = 4/5$ を得る．従って，一般解は次のようになる．

$$\boldsymbol{x} = w \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4/5 \\ 2/5 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{32}$$

(d) $\hat{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の一般解は式 (28) で与えられるから，$\hat{\boldsymbol{A}}$ の零空間は次元が 1 次元で，基底が $[-1, 1, 1]^T$ である．

(e) 前の設問における一般解のうち，$[-1, 1, 1]$ は零空間のベクトルであるから $\boldsymbol{x}_n$ に含まれる．特殊解 $[4/5, 2/5, 0]$ の内，行空間に含まれる成分を求める．その為に，$[4/5, 2/5, 0]$（$\boldsymbol{x}_s$ とする）から $[-1, 1, 1]$（$\boldsymbol{a}$ とする）への射影（$\boldsymbol{p}$ とする．これは零空間の成分）を求めて，それを $\boldsymbol{x}_s = [4/5, 2/5, 0]$

から引く．

$$\boldsymbol{p} = \frac{\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{x}_s}{\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{a}}\boldsymbol{a} = -\frac{2}{15}\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{33}$$

$$\boldsymbol{x}_r = \boldsymbol{x}_s - \boldsymbol{p} = \begin{bmatrix} 4/5 \\ 2/5 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2/15 \\ -2/15 \\ -2/15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10/15 \\ 8/15 \\ 2/15 \end{bmatrix} \tag{34}$$

(f) 式 (20) に前の設問で求めた $\boldsymbol{x}_r$ を代入して成り立つことを確かめる．

(g) 零空間は $\boldsymbol{a} = [-1, 1, 1]^T$ で張られるから，$\boldsymbol{x}_r$ と $\boldsymbol{a}$ が直交することを確認する．具体的には，これらの内積=0 を確認する．

$$\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{x}_r = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 10/15 \\ 8/15 \\ 2/15 \end{bmatrix} = 0 \tag{35}$$

4. 線形独立なベクトル $\boldsymbol{a}_1 = [1, -1, 0]^T, \boldsymbol{a}_2 = [1, 0, 1]^T, \boldsymbol{a}_3 = [0, 1, -1]^T$ を互いに直交するベクトル $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ に変換せよ（ベクトルの長さを 1 にする必要はない）．さらに，それらが互いに直交することを確かめよ．（参考）Gram-Schmidt の直交化法を利用する．
＜解答例＞

$$\boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{a}_1 = [1, -1, 0]^T \tag{36}$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}_2 &= \boldsymbol{a}_2 - \frac{\boldsymbol{v}_1^T\boldsymbol{a}_2}{\boldsymbol{v}_1^T\boldsymbol{v}_1}\boldsymbol{v}_1 \\ &= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{37}$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}_3 &= \boldsymbol{a}_3 - \frac{\boldsymbol{v}_1^T\boldsymbol{a}_3}{\boldsymbol{v}_1^T\boldsymbol{v}_1}\boldsymbol{v}_1 - \frac{\boldsymbol{v}_2^T\boldsymbol{a}_3}{\boldsymbol{v}_2^T\boldsymbol{v}_2}\boldsymbol{v}_2 \\ &= \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} - \frac{-1}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} - \frac{-1}{3}\begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2/3 \\ 2/3 \\ -2/3 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{38}$$

さらに，$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ が互いに直交することを確認する．具体的には，これらのベクトルの内積を計算し，それが零となることを確認する．

$$\boldsymbol{v}_1^T \boldsymbol{v}_2 = 0 \tag{39}$$
$$\boldsymbol{v}_1^T \boldsymbol{v}_3 = 0 \tag{40}$$
$$\boldsymbol{v}_2^T \boldsymbol{v}_3 = 0 \tag{41}$$

5. 次の行列式を求めよ．行列の性質 1〜10，または行列式の適当な公式を用いて計算する．

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & -2 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 4 & -3 & 5 & 0 \\ 6 & -1 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{D} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 7 & 1 \\ -1 & -2 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

＜解答例＞

$\boldsymbol{A}$ の行列式は，第 1 行と第 3 行が等しいので，零である．

$$\det \boldsymbol{A} = 0 \tag{42}$$

$\boldsymbol{B}$ は 3 角行列であるから，行列式は対角要素の積となる．

$$\det \boldsymbol{B} = 1 \times 2 \times 5 \times (-1) = -10 \tag{43}$$

行列 $\boldsymbol{C}$ は特徴がないので，ガウスの前進消去により，3 角行列に変形する．

$$\boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

これより,

$$\det \boldsymbol{C} = 1 \times (-2) \times 1 \times 1 = -2 \tag{44}$$

行列 $\boldsymbol{D}$ は第 1 行,第 2 行で零の要素が多いので余因子展開を用いる.

$$\det \boldsymbol{D} = 1 \times \boldsymbol{D}_{12} = 1 \times (-1)^{1+2} \det \boldsymbol{M}_{12} \tag{45}$$

$$\det \boldsymbol{M}_{12} = 1 \times (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -3 \tag{46}$$

$$\det \boldsymbol{D} = -1 \times (-3) = 3 \tag{47}$$

6. 行列 $\boldsymbol{A}$ の逆行列を余因子行列と行列式を用いた次の公式により計算せよ.

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \frac{adj\,\boldsymbol{A}}{\det \boldsymbol{A}} \qquad \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

＜解答例＞

まず,$\det \boldsymbol{A}$ を求める.$\boldsymbol{A}$ をガウスの前進消去により 3 角行列に変形する.

$$\det \boldsymbol{A} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -5 \end{vmatrix} = 5 \tag{48}$$

次に，余因子を求める．

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{A}_{11} &= (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 1 & (49)\\
\boldsymbol{A}_{12} &= (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 4 & (50)\\
\boldsymbol{A}_{13} &= (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 2 & (51)\\
\boldsymbol{A}_{21} &= (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 1 & (52)\\
\boldsymbol{A}_{22} &= (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -1 & (53)\\
\boldsymbol{A}_{23} &= (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 2 & (54)\\
\boldsymbol{A}_{31} &= (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 2 & (55)\\
\boldsymbol{A}_{32} &= (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -2 & (56)\\
\boldsymbol{A}_{33} &= (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -1 & (57)
\end{aligned}$$

これらを $adj\boldsymbol{A}$ に代入し，$\boldsymbol{A}$ の逆行列の式を求める．

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 4 & -1 & -2 \\ 2 & 2 & -1 \end{bmatrix} \tag{58}$$