# 線形代数学第１ー期末試験問題＜解答例＞

電子情報学類１年生（１組）平成２０年度前期ー 2008.7.30 ー

1. 次の問いに答えよ．

(a) $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{Ay}$ であるとき，必ず $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$ となるとき，$\boldsymbol{A}$ の零空間を求めよ．

**［解答例］**

上式を満たす $\boldsymbol{x}$，$\boldsymbol{y}$ を行空間の成分 $\boldsymbol{x}_r$，$\boldsymbol{y}_r$ と零空間の成分 $\boldsymbol{x}_n$，$\boldsymbol{y}_n$ に分解する．$\boldsymbol{Ax}_n = \boldsymbol{Ay}_n = \boldsymbol{0}$ であるから，$\boldsymbol{Ax}_r = \boldsymbol{Ay}_r$ となり，$\boldsymbol{x}_r = \boldsymbol{y}_r$ を得る．さらに，$\boldsymbol{A}$ の零空間が零でないベクトルを含むならば，$\boldsymbol{x}_n \neq \boldsymbol{y}_n$ が可能であり，$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$ とはならず，条件と矛盾する．従って，$\boldsymbol{x}_n = \boldsymbol{y}_n = \boldsymbol{0}$ であり，零空間は零ベクトルのみを有する．すなわち，$\boldsymbol{A}$ の零空間は基底が零ベクトルで次元は零次元である．

(b) $n \times n$ 行列 $\boldsymbol{A}$ の全ての列ベクトルが線形独立ならば，$\boldsymbol{A}^2$ の全ての列ベクトルも線形独立であることを示せ.（ヒント）$\boldsymbol{A}$ 及び $\boldsymbol{A}^2$ の零空間の次元に着目する．

**［解答例］**

$\boldsymbol{A}$ の階数は $r = n$ であり，零空間は $n-r = 0$ 次元である．$\boldsymbol{x}$ を零空間のベクトルであるとする，$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$．この式の左から $\boldsymbol{A}$ を乗じる，$\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$．すなわち，$\boldsymbol{x}$ は $\boldsymbol{A}^2$ の零空間でもある．次に，$\boldsymbol{A}^2$ の零空間にあるベクトル $\boldsymbol{y}$ を考える，$\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{y} = \boldsymbol{0}$．この式に左から $\boldsymbol{y}^T$ を乗じる，$\boldsymbol{y}^T\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{y} = \| \boldsymbol{Ay} \|^2 = \boldsymbol{0}$. これより，$\boldsymbol{Ay} = \boldsymbol{0}$ となり，$\boldsymbol{y}$ は $\boldsymbol{A}$ の零空間でもある．このように，$\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{A}^2$ の零空間は等しく，それらの次元も等しくなる．$\boldsymbol{A}^2$ は $n \times n$ 行列であり，零空間の次元 $= n - r = 0$ であるから，$r = n$ となり，全ての列ベクトルは線形独立となる．

(c) $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ が解を持つための必要十分条件は $\boldsymbol{b}$ が $\boldsymbol{A}$ の４つの基本部分空間のどれに含まれるときであるか．理由も述べること．

**［解答例］**

$\boldsymbol{Ax}$ は $\boldsymbol{A}$ の列空間にあるベクトルを表している．$\boldsymbol{b}$ がこのベクトルに等しいと言うことは，$\boldsymbol{b}$ も $\boldsymbol{A}$ の列空間にあることに相当する．

(d) 行空間が $[1, 1, -1]^T, [0, 1, -1]$ で張られ，零空間が $[0, 1, 1]$ で張られるような行列が存在することを示せ.

**[解答例]**

上記の行空間と零空間が直交補空間であることを示す．全空間は $\boldsymbol{R}^3$ である．行空間の次元（2 次元）＋零空間の次元（1 次元）=3 次元（全空間の次元）．次に，$[1,1,-1]^T, [0,1,-1]$ と $[0,1,1]$ の内積は零であるから，直交補空間の関係にあり，このような行列は存在する．

(e) $n$ 個の $m$ 次元ベクトルは $n \leq m$ のとき線形独立となる可能性があることを示せ．

**[解答例]**

$n$ 個の $m$ 次元ベクトルを列ベクトルとする $m \times n$ 行列 $\boldsymbol{A}$ を考える．この行列の階数は $r \leq n$ である．すなわち，高々$n$ である．階数が線形独立なベクトルの個数を表しているので，線形独立なベクトルの個数は高々$n$ である．すなわち，$n$ 個のベクトルが線形独立になる可能性がある．

2. 次の方程式 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ の一般解を求めよ。$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ の一般解と，$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ の特殊解の和の形で表せ。

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -2 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

**[解答例]**

$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ の一般解を求める．ガウスの前進消去の結果，以下のようになる．

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$u$，$v$ を基底変数，$w$ を自由変数とすると一般解は次のようになる．

$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = w \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

次に，$w = 0$ とした時の $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ の特殊解を求める．ガウスの全消去の結果は次のようになる．

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

上式で，$w=0$ とすると，

$$
\begin{aligned}
u-2v&=2\\
-v&=1
\end{aligned}
$$

となる．これらより，$v=-1, u=0$ を得る．以上より，$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ の一般解は次のようになる．

$$
\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = w\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}
$$

3.　次の行列について擬似逆行列を求めよ．

$$
\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}
$$

**[解答例]**

擬似逆行列は右逆行列となり，$\boldsymbol{A}^T(\boldsymbol{AA}^T)^{-1}$ で与えられる．

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{AA}^T &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}\\
(\boldsymbol{AA}^T)^{-1} &= \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\\
\boldsymbol{A}^T(\boldsymbol{AA}^T)^{-1} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

4.　$\boldsymbol{R}^3$ における次の２つの部分空間 $V$ と $W$ の関係は「直交空間」,「補空間」,「直交補空間」,「いずれでもない」のいずれであるか答えよ．理由も示すこと．(ベクトルの直交性，ベクトルの独立性，２つの空間の次元の和，等に着目)．$\boldsymbol{R}^3$ におけるベクトルを $[x,y,z]^T$ と表す．

(a)　$V$：$x$ 軸，$W$：$x-y$ 平面．

**[解答例]**

$V$ の基底を $\boldsymbol{v}=[x,0,0]^T$，$W$ の基底を $\boldsymbol{w}_1=[x,0,0]^T$，$\boldsymbol{w}_2=[0,y,0]^T$ と

することが出来る．$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{w}_1$ であるから，これらは線形従属である．従って，$V$ と $W$ は直交空間，補空間の「いずれでもない」．

(b)　$V$：$x$ 軸，$W$：$y-z$ 平面．

**[解答例]**

$V$ の基底を $\boldsymbol{v} = [x, 0, 0]^T$，$W$ の基底を $\boldsymbol{w}_1 = [0, y, 0]^T$，$\boldsymbol{w}_2 = [0, 0, z]^T$ とすることが出来る．$\boldsymbol{v}^T\boldsymbol{w}_1 = 0$，$\boldsymbol{v}^T\boldsymbol{w}_2 = 0$ であり，かつ，$V$ の次元 (1 次元) ＋ $W$ の次元 (2 次元)=3 次元=全空間の次元 (3 次元) であるから，$V$ と $W$ は「直交補空間」である．

(c)　$V$：$x-y$ 平面上にある直線 $x+y=0$，$W$：$y-z$ 平面上にある直線 $y-z=0$

**[解答例]**

$V$ の基底を $\boldsymbol{v} = [x, -x, 0]^T$，$W$ の基底を $\boldsymbol{w} = [0, y, y]^T$ とすることが出来る．$\boldsymbol{v}$ と $\boldsymbol{w}$ は内積が零ではなく直交していないが，線形独立である．一方，$V$ の次元 (1 次元) ＋ $W$ の次元 (1 次元)=2 次元 $<$ 全空間の次元 (3 次元) であるから，$V$ と $W$ は直交空間，補空間の「いずれでもない」．

(d)　$V$：ベクトルが $x+y=0$ を満たす部分空間，$W$：ベクトルが $y+z=0$ を満たす部分空間. ((c) とは条件が異なることに注意)

**[解答例]**

$V$ の基底を $\boldsymbol{v}_1 = [x, -x, 0]^T$, $\boldsymbol{v}_2 = [x, -x, 1]^T$, $W$ の基底を $\boldsymbol{w}_1 = [0, y, -y]^T$, $\boldsymbol{w}_2 = [1, y, -y]^T$ とすることが出来る．$\boldsymbol{v}_i$ と $\boldsymbol{w}_j$ は内積が零ではなく直交していないが，線形独立である．一方，$V$ の次元 (2 次元) ＋ $W$ の次元 (2 次元)=4 次元 $>$ 全空間の次元 (3 次元) であるから，$V$ と $W$ は直交空間，補空間の「いずれでもない」．

5.　以下の問いに答えよ．

(a)　$\boldsymbol{R}^3$ におけるベクトルを $[x, y, z]^T$ と表す．$x+y+z=0$ を満たすベクトルからなる部分空間 $V$ の基底を求めよ．基底は一つの例を求めること．

**[解答例]**

$x+y+z=0$ において，自由に選べる変数は 2 個である．例えば，$x$ と $y$ を決めると $z$ は自動的に決まる．ここでは，$(x, y) = (1, 0)$，$(x, y) = (0, 1)$ のように選択する．これに対する $z$ は $-1$ となる．従って，$V$ の基底の一つの例は，$[1, 0, -1]^T$，$[0, 1, -1]^T$ となる．

(b)　上記の部分空間 $V$ の直交補空間を求めよ．

**[解答例]**

$V$ を行空間とする行列の零空間を求める．

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

これを解いて

$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = w \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

以上より，$V$ の直交補空間の次元は 1 次元，基底は $[1,1,1]^T$ となる．

6. 行列 $\boldsymbol{A}$ の零空間がベクトル $\boldsymbol{v}_1 = [1,0,2,-1]^T$，$\boldsymbol{v}_2 = [-2,1,-1,1]^T$，$\boldsymbol{v}_3 = [-1,1,1,0]^T$ で張られるとき，行列 $\boldsymbol{A}$ を求めよ．

**［解答例］**

上記の零空間を行空間とする行列の零空間として，$\boldsymbol{A}$ の行空間が求まる．この行空間から $\boldsymbol{A}$ が求まる．

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ガウスの前進消去により，

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$u$，$v$ を基底変数，$w$，$y$ を自由変数として，この方程式を解く．

$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \\ y \end{bmatrix} = w \begin{bmatrix} -2 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

この零空間の基底は $[-2,-3,1,0]^T$ と $[1,1,0,1]^T$ となり，次元は 2 次元である．この零空間を行空間とする行列 $\boldsymbol{A}$ は次式で与えられる．

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} -2 & -3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

7. 次の行列に付随する 4 つの基本部分空間（行空間，零空間，列空間，左零空間）を求めよ（空間の次元と基底を求める）．さらに，行空間と零空間，及び列空間と左零空間が直交することを確かめよ．(基底が直交することを示す)．

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

[**解答例**]

行空間を求める．$\boldsymbol{A}$ をガウスの前進消去を行う．

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \rightarrow \boldsymbol{U} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\boldsymbol{U}$ の第 1 行と第 2 行が行空間の基底となる．次元は 2 次元である．

基底：$[-1,1,1,-1]^T$，$[0,1,0,-2]^T$

次元：2 次元

---

零空間を求める．$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ はガウスの前進消去により，次のように変形できる．

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$u$，$v$ を基底変数，$w$，$y$ を自由変数として，この方程式を解く．

$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \\ y \end{bmatrix} = w \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

以上より，零空間は次のようになる．
基底：$[1, 0, 1, 0]^T$，$[1, 2, 0, 1]^T$
次元：2 次元

---

列空間を求める．行列 $\boldsymbol{U}$ のピボットの位置から，$\boldsymbol{A}$ の第１列と第２列が線形独立であり，これらが列空間の基底となる．
基底：$[-1, 2, 1]^T$，$[1, -1, 0]^T$
次元：２次元

---

左零空間を求める．$\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{y} = \boldsymbol{0}$ を解く．

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ガウスの前進消去を行う．

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$u$，$v$ を基底変数，$w$ を自由変数として，この方程式を解く．

$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = w \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

以上より，
基底：$[-1, -1, 1]^T$
次元：１次元
（補足）
左零空間は列空間に直交するので，列空間の基底を行とする行列を用いてもよい．

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$