線形代数学第２－期末試験問題－

電子情報学類１年生（１組）　　　平成２０年度後期－ 2009.2.4 －

1. $\boldsymbol{A}$ を 2×2 の実対称行列とする．ベクトル $\boldsymbol{x} = [1,1]^T$ に $\boldsymbol{A}$ をかけると $[3,3]^T$ になった．また，$\boldsymbol{A}$ の行列式は 3 である．$\boldsymbol{A}$ を求めよ.（ヒント：実対称行列において，異なる固有値に対する固有ベクトルは直交する．$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{S\Lambda S}^{-1}$）

2. ２次元ベクトル $\boldsymbol{x}(n) = [x_1(n), x_2(n)]^T$ が次式により更新される。

$$\boldsymbol{x}(n+1) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(n), \qquad \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

(a) $\boldsymbol{A}$ の固有値，固有ベクトルを求めよ.
(b) $\boldsymbol{x}(n)$ を求めよ。
(c) $n \to \infty$ としたとき，$\boldsymbol{x}(n)$ はどうなるか。

3. 次の微分方程式を解け．また，この微分方程式の解は安定であるか，不安定であるか示せ.

$$\frac{d\boldsymbol{u}(t)}{dt} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \boldsymbol{u}(t), \qquad \boldsymbol{u}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

4. 次の行列に関して，以下の問に答えよ.

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

(a) $\boldsymbol{A}$ をスペクトル定理で分解せよ.
(b) $\boldsymbol{A}$ を固有値の大きい成分のみを用いて表せ.

5.　複素ベクトル $\boldsymbol{x} = [1+i, i]^T$ と $\boldsymbol{y} = [1-i, -i]^T$ について
(a)　各々の長さ（ノルム）を求めよ（$\sqrt{\text{数値}}$ の形でよい）.
(b)　$\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ の内積を求めよ.

6. 実対称行列 $\boldsymbol{A}$ が正定値であるための必要十分条件は次のように表される.
（１）$\boldsymbol{0}$ でない全てのベクトル $\boldsymbol{x}$ に対して $\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} > 0$ である.
（２）$\boldsymbol{A}$ の全ての固有値が正である：$\lambda_i > 0$.
（３）部分行列 $\boldsymbol{A}_k$ の行列式が全て正である：$\det \boldsymbol{A}_k > 0$.
（４）$\boldsymbol{A}$ の全てのピボットが正である:$d_k > 0$．但し，行の交換はないものとする.
（５）$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{W}^T\boldsymbol{W}$ となる正則行列 $\boldsymbol{W}$ が存在する.
以下の問に答えよ.
(a)（１）から（２）を証明せよ.
(b)（１）,（２）から（３）を証明せよ.
(c)（３）から（４）を証明せよ.
(d)（２）と $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{S\Lambda S}^{-1}$ から（５）を証明せよ.（ヒント：$\boldsymbol{A}$ が実対称行列であり，固有ベクトルは正規直交系をなすため $\boldsymbol{S}^{-1} = \boldsymbol{S}^T$ が成り立つ）