線形代数学第１－中間試験問題－

電子情報学類１年生（１組）　　　平成２１年度前期－ 2009.6.3 －

1. 次のベクトル，行列の計算を行え．計算が不可能な場合は「計算不可」と答えること．

$$(a)\ \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} \qquad (b)\ \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -4 & 1 \end{bmatrix} \qquad (c)\ \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 4 & -2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ -2 & 3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$(d)\ \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix} \qquad (e)\ \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \qquad (f)\ \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix}$$

2. ガウスの前進消去に関して以下の問に答えよ．
 (a) 第１行を a 倍して第２行から引く行列を $\boldsymbol{E}_{21}$，第１行を b 倍して第３行から引く行列を $\boldsymbol{E}_{31}$，第２行を c 倍して第３行から引く行列を $\boldsymbol{E}_{32}$ とする．$\boldsymbol{E}_{21}$，$\boldsymbol{E}_{31}$，$\boldsymbol{E}_{32}$ を求めよ．
 (b) $\boldsymbol{E}_{21}^{-1}$，$\boldsymbol{E}_{31}^{-1}$，$\boldsymbol{E}_{32}^{-1}$ を求めよ．
 (c) $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{E}_{21}^{-1}\boldsymbol{E}_{31}^{-1}\boldsymbol{E}_{32}^{-1}$ を求めよ．

3. 次の連立方程式をガウスの前進消去と後退代入により解け．前進消去の途中で行の交換が必要となる場合は，この行の交換を行う行列 $\boldsymbol{P}$ を求めよ．

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

4. 次の行列を LDU に分解せよ．

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

5. 次の行列の逆行列を *Gauss-Jordan* 法により求めよ．

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

6. 3×3 行列 $\boldsymbol{A}$ の行ベクトルを $\boldsymbol{a}_1^T, \boldsymbol{a}_2^T, \boldsymbol{a}_3^T$ とする．$c_1\boldsymbol{a}_1 + c_2\boldsymbol{a}_2 + c_3\boldsymbol{a}_3 = \boldsymbol{0}$ を満たす c_i が零のみであるとき，$\boldsymbol{A}$ の逆行列が存在することを証明せよ．(ヒント）ガウスの前進消去により $\boldsymbol{A}$ を $\boldsymbol{U}$ に変換したとき，$\boldsymbol{U}$ の第１行は $\boldsymbol{a}_1^T$，第２行は $d_1\boldsymbol{a}_1^T + \boldsymbol{a}_2^T$，第３行は $e_1\boldsymbol{a}_1^T + e_2\boldsymbol{a}_2^T + \boldsymbol{a}_3^T$ と表される．但し，$d_1 \neq 0$，$e_1 \neq 0$，$e_2 \neq 0$ であると仮定する．逆行列の計算は，*Gauss-Jordan* 法によれば，$\boldsymbol{A}$ を単位行列 $\boldsymbol{I}$ に変形することと同じである．

7. 対角要素が１である下３角行列 $\boldsymbol{A}$ の逆行列は対角要素が１である下３角行列であることを証明せよ．3×3 行列の例を用いて，$\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{I}$ を満たす $\boldsymbol{B}$ を求めよ．