平成21年度後期

線形代数学第2 期末試験　2010.2.10
<解答例>

[1] 次の関係が成り立つ.

$$A\boldsymbol{x}_1 = \lambda_1 \boldsymbol{x}_1 \quad \cdots (1)$$
$$A\boldsymbol{x}_2 = \lambda_2 \boldsymbol{x}_2 \quad \cdots (2)$$

式(1)を転置して右から $\boldsymbol{x}_2$ を掛ける.

$$\boldsymbol{x}_1^T A^T = \lambda_1 \boldsymbol{x}_1^T \quad \times \ \boldsymbol{x}_2$$
$$\boldsymbol{x}_1^T A^T \boldsymbol{x}_2 = \lambda_1 \boldsymbol{x}_1^T \boldsymbol{x}_2 \quad \cdots (3)$$

式(2)に左から $\boldsymbol{x}_1^T$ を掛ける.

$$\boldsymbol{x}_1^T A \boldsymbol{x}_2 = \lambda_2 \boldsymbol{x}_1^T \boldsymbol{x}_2 \quad \cdots (4)$$

$A = A^T$ であるから, 式(3)は次のようになる.

$$\boldsymbol{x}_1^T A \boldsymbol{x}_2 = \lambda_1 \boldsymbol{x}_1^T \boldsymbol{x}_2 \quad \cdots (3)'$$

(3)′−(4) を計算する.

$$(\lambda_1 - \lambda_2)\boldsymbol{x}_1^T \boldsymbol{x}_2 = 0$$

条件より, $\lambda_1 \neq \lambda_2$ であるから

$$\boldsymbol{x}_1^T \boldsymbol{x}_2 = 0$$

$\boldsymbol{x}_1$ と $\boldsymbol{x}_2$ の内積が零であるから, これらは直交する.

[2]

$$\boldsymbol{a} = c_1 \boldsymbol{x}_1 + c_2 \boldsymbol{x}_2$$
$$A\boldsymbol{a} = A(c_1 \boldsymbol{x}_1 + c_2 \boldsymbol{x}_2)$$
$$= c_1 A\boldsymbol{x}_1 + c_2 A\boldsymbol{x}_2 = c_1 \boldsymbol{x}_1 - 2c_2 \boldsymbol{x}_2$$

上式より,

$$A\boldsymbol{x}_1 = 1 \cdot \boldsymbol{x}_1$$
$$A\boldsymbol{x}_2 = -2\boldsymbol{x}_2$$

が成り立つ. これは A の固有値が $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -2$ であり, これらに対する固有ベクトルが $\boldsymbol{x}_1 = [1, 1]^T$, $\boldsymbol{x}_2 = [1, -1]^T$ である

ことを表している。これより,

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \quad \Lambda = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

を得る。$A = S\Lambda S^{-1}$ より

$$S^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} //$$

[3] 行列の固有値を $\lambda_1 \sim \lambda_n$ とすると,次の関係が成り立つ.

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} \quad \cdots\cdots (1)$$

$$\det(A - \lambda I) = (\lambda_1 - \lambda)(\lambda_2 - \lambda)\cdots(\lambda_n - \lambda) \quad \cdots (2)$$

(a) 式(1)と(2)を λ の関数と見なして係数を比較する。式(2)では $(-\lambda)^{n-1}$ の係数が $\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n$ (固有値の和)になる。式(1)で $(-\lambda)^{n-1}$ の係数を調べる。行列式の計算では,各行,各列から1個の要素を選び積を求め加算する。$(-\lambda)^{n-1}$ の項を含む積は

$$(a_{11}-\lambda)(a_{22}-\lambda)\cdots(a_{nn}-\lambda)$$

となる。上式で $(-\lambda)^{n-1}$ の係数は $a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}$ (対角要素の和:トレース)となる。以上より,

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn} //$$

(b) 式(2)はλに関する恒等式であるから，$\lambda=0$としても成り立つ．これより，

$$\det A = \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n \quad //$$

[4] 行列の固有値と固有ベクトルを求める．

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2-4 = \lambda^2-2\lambda-3 = (\lambda-3)(\lambda+1) = 0$$

より，　$\lambda_1 = 3$，$\lambda_2 = -1$

$$\begin{bmatrix} 1-3 & 2 \\ 2 & 1-3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ より } \boldsymbol{x}_1 = \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1+1 & 2 \\ 2 & 1+1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_{21} \\ x_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ より } \boldsymbol{x}_2 = \begin{bmatrix} x_{21} \\ x_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

これらを用いてS，$e^{\Lambda t}$，S^{-1}は次のようになる．

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix},\quad e^{\Lambda t} = \begin{bmatrix} e^{3t} & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{bmatrix},\quad S^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

これらを

$$\boldsymbol{u}(t) = S e^{\Lambda t} S^{-1} \boldsymbol{u}_0$$

に代入する．

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u}(t) &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e^{3t} & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{bmatrix}\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e^{3t} & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{bmatrix}\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\frac{1}{2}\begin{bmatrix} e^{3t} \\ e^{-t} \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}e^{3t} + \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}e^{-t} \quad // \end{aligned}$$

(別表現)　$\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e^{3t} \\ e^{-t} \end{bmatrix}$，$\frac{1}{2}\begin{bmatrix} e^{3t}+e^{-t} \\ e^{3t}-e^{-t} \end{bmatrix}$

安定性　$\lambda_1 = 3 > 0$であるので不安定である．//

[5]

(a) $\|x\|^2 = |1-i|^2 + |1+i|^2 = (1+1) + (1+1) = 4$

$\therefore \|x\| = 2$ //

$\|y\|^2 = |i|^2 + |1-i|^2 = 1 + (1+1) = 3$

$\therefore \|y\| = \sqrt{3}$

(b) $x^H y = [1+i, 1-i]\begin{bmatrix} i \\ 1-i \end{bmatrix} = (1+i)i + (1-i)^2$

$= i - 1 + 1 - 2i - 1 = -1 - i$ //

$y^H x = [-i, 1+i]\begin{bmatrix} 1-i \\ 1+i \end{bmatrix} = -i(1-i) + (1+i)^2$

$= -i - 1 + 1 + 2i - 1 = -1 + i$ //

(c) xとyの内積が零または純虚数とならないので，xとyは直交しない．

[6]

(a) $Ax_i = \lambda_i x_i$

上式に左からx_i^Tを掛ける．

$x_i^T A x_i = \lambda_i x_i^T x_i$

これより，$\lambda_i = \dfrac{x_i^T A x_i}{\|x_i\|^2}$

(1)より，$x_i^T A x_i < 0$であるから，$\lambda_i < 0$となる．

(b) $x = [x_k, 0]^T$とする．x_kはk次元ベクトルである．

$[x_k, 0]\begin{bmatrix} A_k & * \\ * & * \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_k \\ 0 \end{bmatrix} = x_k^T A_k x_k > 0$ ---(1)より

A_kは左上の$k \times k$部分行列

(2)より，A_kの固有値は全て負である．($\det A_k$ = 固有値の積)

であるから、k＝偶数のとき $\det A_k > 0$、k＝奇数のとき $\det A_k < 0$ となる。

(c) 行列式はピボットの積であるから、

$$\det A_k = d_1 d_2 \cdots d_k$$

となる。これより

$$d_k = \frac{\det A_k}{\det A_{k-1}}$$

(3)より、$\det A_{k-1} > 0$、$\det A_k < 0$ または $\det A_{k-1} < 0$、$\det A_k > 0$ であるから、

$$d_k < 0$$

となる。

(d)

$$A = S \Lambda S^T \quad \text{-----} \quad (1)$$

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} -\lambda_1 & & & \\ & -\lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & -\lambda_n \end{bmatrix}, \quad -\lambda_i > 0$$

性質(2)より

$$\sqrt{-\Lambda} = \begin{bmatrix} \sqrt{-\lambda_1} & & & \\ & \sqrt{-\lambda_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sqrt{-\lambda_n} \end{bmatrix}$$

とすると、

$$\Lambda = -(-\Lambda) = -\sqrt{-\Lambda}\sqrt{-\Lambda}$$

上式を式(1)に代入する。

$$A = S\left(-\sqrt{-\Lambda}\sqrt{-\Lambda}\right)S^T = -\left(S\sqrt{-\Lambda}\right)\left(\sqrt{-\Lambda}\,S^T\right)$$

$$= -\left(\sqrt{-\Lambda}\,S^T\right)^T\left(\sqrt{-\Lambda}\,S^T\right) = -W^T W$$

$\therefore$ $W = \sqrt{-\Lambda}\,S^T$ これは正則な行列である。

(e) (5)より

$$\boldsymbol{x}^T A \boldsymbol{x} = -\boldsymbol{x}^T W^T W \boldsymbol{x} = -(W\boldsymbol{x})^T W \boldsymbol{x} = -\|W\boldsymbol{x}\|^2 < 0$$

[7] Aの固有値をλとすると，A^2，A^{-1}の固有値はλ^2，λ^{-1}となる．
Aが正定値であれば$\lambda>0$であり，$\lambda>0$であれば$\lambda^2>0$，$\lambda^{-1}>0$
であるからA^2，A^{-1}も正定値である．

$$\boldsymbol{x}^T(A+B)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}^T A \boldsymbol{x} + \boldsymbol{x}^T B \boldsymbol{x} \quad \text{---} (1)$$

条件より，

$$\boldsymbol{x}^T A \boldsymbol{x} > 0, \quad \boldsymbol{x}^T B \boldsymbol{x} > 0$$

であるから，式(1)より

$$\boldsymbol{x}^T(A+B)\boldsymbol{x} > 0$$

となり，$A+B$も正定値である．