線形代数学第２－中間試験問題－

電子情報学類１年生（１組）　　　平成２１年度後期－ 2009.11.25 －

1. 曲線 $y = C + D2^t$ で３点 $(t, y) = (0, 1), (1, 2), (2, 3)$ を近似するとき，誤差の二乗和を最小にするように C, D を求めよ．y，C，D，t はスカラーである．

2. $\boldsymbol{R}^4$ における部分空間 V のベクトル $\boldsymbol{x} = [x_1, x_2, x_3, x_4]^T$ が次式を満たすとき，以下の問に答えよ．

$$x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0$$
$$x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 0$$

 (a) 空間 V の基底を求めよ．
 (b) 空間 V を列空間とする行列 $\boldsymbol{A}$ を求めよ．
 (c) 空間 V 上で，座標点 $(1, 1, 1, 1)$ への距離が最小となる点の座標を求めよ．

3. 以下の問に答えよ．
 (a) 線形独立なベクトル $\boldsymbol{a}_1 = [1, 1, -1]^T, \boldsymbol{a}_2 = [1, 0, 1]^T, \boldsymbol{a}_3 = [0, -1, 1]^T$ を互いに直交するベクトル $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ に変換せよ．
 (b) $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ が互いに直交することを確かめよ．

4. $\boldsymbol{q}_1, \boldsymbol{q}_2, \boldsymbol{q}_3$ を正規直交系ベクトルであるとする．$\boldsymbol{q}_1, \boldsymbol{q}_2, \boldsymbol{q}_3$ を列ベクトルとする行列 $\boldsymbol{Q}$ が零でないベクトル $\boldsymbol{x}$ に対して $\| \boldsymbol{Qx} \| = \|\boldsymbol{x}\|$ を満たすことを示せ.（ヒント）先ず，$\boldsymbol{Q}^T\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{I}$ を示す.

5. 行列式に関して，以下の問に答えよ．(c)，(d)，(e) は 2×2 の具体例ではなく，一般的に証明せよ．
 (a) 次式を用いて,「(性質１）行列式は一つの行に関して線形関数である」ことを証明せよ．

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

 (b) 上式を用いて,「(性質２）2 つの行が交換されると行列式は符号を変える」ことを証明せよ．
 (c) 性質 1 または性質 2（必要であれば両方）を用いて「(性質４）行列の 2 つの行が等しい場合は行列式は零である」ことを証明せよ．
 (d) 性質 1，4 を用いて「ある行の何倍かを他の行から引くことにより，行列式は変わらない」ことを証明せよ．
 (e) 性質 4，5 を用いて「零の行を持つ行列の行列式は零である」ことを証明せよ．

6. 次の行列式を求めよ．行列の性質 1～10，または行列式の適当な公式を用いて計算する．

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 5 & 0 & 0 \\ 3 & -3 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 & 5 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & -2 \\ 2 & -3 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{D} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

7. 次の連立方程式の解をクラメルの公式により求めよ．

$$\begin{aligned} u + v - w &= 1 \\ u - 3v + 2w &= -1 \\ 2u + v - w &= 2 \end{aligned}$$

8.　次の行列 $\boldsymbol{A}$ の逆行列を $adj\boldsymbol{A}/det\boldsymbol{A}$ により求めよ．

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$